ЦЕРКОВНЫЕ КАЛЕНДАРИ И ПАСХАЛИЯ (МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПОДХОД)*

Ю. В. Нестеренко

Календарь есть средство для организации нашей жизни во времени. Христианские календари (юлианский, григорианский и новоюлианский) упорядочивают и связывают в пространстве и во времени все многообразие церковной жизни. Где бы ни находились мы и наши единоверцы, мы отмечаем праздники или соблюдаем посты в одно и то же время. Календарь служит символом единения, ощущения соборности, он — это история Церкви и ее будущее.

Календари, являясь не очень сложными математическими конструкциями, устоявшимися в течение столетий и тысячелетий, сами стали традицией Церкви, и каждое самое незначительное изменение в них неминуемо ведет к изменению сложившихся привычек и отражается на жизни миллионов верующих, может привести к несогласию и тяжелым последствиям.

В то же время нельзя не заметить ряд проблем, как правило возникающих при совместном использовании различных календарей или сравнении календаря с астрономической реальностью.

Проблемы. С 1918 г. в России введен григорианский календарь, и в настоящее время он используется в повседневной жизни. За прошедшее с тех пор время и в последующий до 2100 г. период високосные годы, исчисляемые по юлианскому и григорианскому календарям, совпадают. Мы привыкли к тому, что из года в год празднуем Рождество Христово 7 января, а Благовещение 7 апреля по новому стилю. Но после февраля 2100 г. неподвижные праздники, оставаясь неподвижными по юлианскому календарю, впервые для нашей Церкви сдвинутся в григорианском календаре на один день. Благовещение в 2100 г. будет праздноваться 8 апреля, а Рождество в 2101 г. придется на 8 января.

Поместные Православные Церкви, перешедшие в 1923 г. на новоюлианский календарь, для определения даты празднования Пасхи пользуются юлианской пасхалией. При этом даты подвижных событий, вычисленные по юлианской пасхалии и автоматически перенесенные на новоюлианский стиль, зачастую входят в противоречие с неподвижными праздниками, определенными по этому стилю. Наиболее яркий пример — Петров пост. Начало его приходится на седьмой день

* Автор — зав. кафедры теории чисел механико-математического факультета МГУ, чл.-корр. РАН.

Богословские труды. № 42. 2009. С. 318–362.

после Троицы и потому не имеет фиксированной даты, завершается же он накануне праздника Петра и Павла, т. е. 28 июня. Разница между датами юлианского и новоюлианского календарей составляет в настоящее время 13 суток и с течением времени будет увеличиваться. В результате Пасха, а вместе с ней и начало Петрова поста будут смещаться к летним датам новоюлианского календаря. Сначала Петров пост уменьшится, а затем и вовсе исчезнет.

Как известно, юлианское весеннее равноденствие благодаря неточности приближения астрономического года смещается к лету, и, если ничего не менять, нашей Церкви придется праздновать Пасху во время зимы в Иерусалиме, а затем и перед иудейской Пасхой.

Впервые идея реформирования юлианского календаря в России официально рассматривалась, по-видимому, в 1829–1830 гг. специальным Комитетом при Российской академии наук, высказавшимся тогда за переход на григорианский календарь. Впоследствии рассматривались и другие варианты. В настоящее время можно утверждать, что григорианский календарь — не лучшая из возможных замен юлианского календаря.

Юлианский и григорианский календари имеют принципиально различные системы распределения лунных месяцев. Юлианский календарь старается по возможности точнее приблизить начала *всех* астрономических лунных месяцев. Григорианский же календарь прямым вычислением находит очередное январское новолуние и таким способом следит за тем, чтобы январские, а значит, и мартовские новолуния и полнолуния были по возможности ближе к астрономическим. Именно мартовские полнолуния связаны с вычислением Пасхи. Нельзя сказать, что календарные события, происходящие в конце лунных годов, не заботили создателей григорианского календаря. В пределах возможного они пытались скорректировать распределения новолуний, чтобы избежать нежелательных эффектов. Но период календаря 5700000 лет очень велик, а функция, вычисляющая январские новолуния, достаточно сложна. Вручную проверить все последствия принятой конструкции можно было лишь на несколько тысяч лет вперед. В настоящее время, пользуясь компьютером, можно легко просмотреть весь период и обнаружить некоторые несоответствия с астрономическими событиями. Например, в григорианском календаре возможны лунные месяцы продолжительностью как в 59 дней, так и в 1 день. Конечно, все это происходит в конце лунных годов и не отражается на пасхалии, но факт остается фактом — григорианский календарь иногда теряет новолуния, а иногда вставляет лишние новолуния там, где их не должно быть.

В статье представлена единая точка зрения на три христианских календаря. Пользуясь принципами, лежащими в основе юлианского календаря, можно построить несколько календарей, располагающих не уступающими, а в чем-то даже лучшими характеристиками по сравнению с григорианским. Например, сохранив принятую в григорианском календаре систему счета годов, можно изменить его распределение месяцев. Период календаря при этом уменьшится до 6400 лет. Существует календарь с периодом в 372 года (вместо 532 у юлианского календаря), по точности распределения годов превосходящий григорианский календарь. Мы описываем также возможную лунную составляющую новоюлианского календаря, обеспечивающую высокую точность и сравнительно небольшой период.

Астрономия и точность. Исторически сложившиеся единицы измерения больших промежутков времени: *год, месяц, день или сутки* связаны с периодически повторяющимися астрономическими событиями. По ряду причин эти основные временные отрезки не постоянны, но меняются очень медленно и неравномерно. Земля замедляет вращение вокруг своей оси, Луна удаляется, и период ее обращения вокруг Земли увеличивается, продолжительность обращения Земли вокруг Солнца также меняется. Существующие теории, описывающие эти изменения, рассчитаны на несколько тысячелетий и не могут дать достоверных результатов на промежутках, отстоящих достаточно далеко от нашего времени.

Вместе с тем календарь, будучи принятым, теряет всякую связь с астрономией и функционирует как независимая и незыблемая математическая конструкция. Григорианский календарь, созданный более 400 лет тому назад, за прошедшее время не изменился. Церковный юлианский календарь остается неизменным в течение еще большего промежутка времени. Точность календаря во многом определяется точностью астрономических измерений и выбором рациональных приближений к возникающим в результате этих измерений средним величинам.

Для оценки точности календарей мы, следуя традиции, принимаем простую модель, в которой Земля и Луна равномерно вращаются по своим круговым орбитам, а сама Земля с неизменной скоростью вращается вокруг своей оси, сохраняющей фиксированное направление в пространстве. Поэтому, сравнивая точность календарей, особенно на больших промежутках времени, нужно иметь в виду условность такого сравнения.

Средний солнечный год α (так называемый тропический год) и средний лунный месяц β (синодический месяц), выраженные в сутках, несоизмеримы:

$$\alpha = 365{,}242198\ldots \qquad \beta = 29{,}530588\ldots$$

Имеется в виду, что между этими числами не существует соотношений со сравнительно небольшими целыми коэффициентами, а сами они не могут быть хорошо приближены рациональными числами с небольшими числителями и знаменателями. Это свойство подтверждается непосредственной проверкой, например, при помощи компьютера. С несоизмеримостью связаны трудности устройства календарей, ведь решаемая задача состоит в том, чтобы по возможности более точно измерить в долях суток несоизмеримые продолжительности года и месяца.

Календари. Единицы измерения времени в календарях носят названия календарный год, лунный год, лунный месяц, день (сутки). Течение времени в календарях есть последовательность дней, по-разному представляемая в виде последовательностей годов, календарных и лунных, а также последовательности лунных месяцев. Каждый календарный год и каждый лунный месяц содержат целое число дней. Календарные и лунные годы, как и лунные месяцы, могут иметь различную продолжительность. Каждый лунный год состоит из нескольких лунных месяцев. Первый день каждого лунного месяца называется *новолунием*. Если календарному году, лунному месяцу и дню соответствуют реальные астрономические события, то лунный год есть формальная характеристика, вводимая для удобства описания календаря. Начала лунных годов выбираются так, чтобы длины их не очень отличались от длины астрономического года. Это отличие не превосходит длины астрономического месяца.

Говоря в дальнейшем о периодичности календаря, мы имеем в виду следующее. Определим три функции натурального аргумента. Первая функция $f(n)$

равна количеству дней в календарном году с номером n. Аналогично вторая функция $g(n)$ равна количеству дней в лунном месяце с номером n, а третья функция $h(n)$ равна количеству месяцев в лунном году с номером n. Периодичность календаря означает периодичность этих функций. Каждая из них, конечно, имеет свой собственный период. Определения годов и лунных месяцев в юлианском и григорианском календарях отличаются, но оба эти календаря являются периодическими. В первом из них периоды функций $f(n)$, $g(n)$ и $h(n)$ равны 4 года, 940 месяцев и 19 лет, а во втором, соответственно, 400 лет, 70570000 месяцев и 5700000 лет. Не вдаваясь в подробности, заметим также, что календари, основанные на ежегодных точных астрономических данных о весеннем равноденствии и новолуниях, периодическими не являются[1].

1. Юлианский календарь

В основе юлианского лунно-солнечного календаря лежат следующие приближения к длительностям тропического года α суток и синодического месяца β суток:

$$76\alpha - 27759 = -0{,}592\ldots,\quad 940\beta - 27759 = -0{,}247\ldots \tag{1}$$

Этим равенствам соответствует так называемое уравнение Каллиппа[2]:

76 *лунных лет* = 76 *календарных годов* = 940 *лунных месяцев* = 27759 *суток*.

В каждом отрезке из 76 подряд идущих календарных лет юлианского календаря содержится 27759 дней. Каждый отрезок из 76 подряд идущих лунных лет содержит 940 лунных месяцев и состоит из 27759 дней. Кроме того, число 76 есть период функции $f(n)$, а 940 — период функции $g(n)$.

1.1. Годы. Календарные годы юлианского календаря состоят из 365 или из 366 дней. Причем год содержит 365 дней, если его номер не делится на 4 (обыкновенный год), и 366 дней, если его номер делится на 4 (високосный год)[3]. Другими словами, в юлианском календаре принимается[4]

$$f(n) = 365 + \delta_4(n). \tag{2}$$

[1] Если согласиться с тем, что длина тропического года, выраженная в сутках, иррациональна (конечно, это некоторая математическая абстракция, но ведь и календарь есть математическая модель), то, например, последовательность отклонений тропического года от календарного, т. е. последовательность $\alpha n - [\alpha n]$ не будет периодической (определение используемой здесь функции $[x]$ дается ниже в прим. 6). Более того, все ее элементы различны. В действительности приведенное рассуждение означает, что возможный период календарного исчисления годов будет очень большим.

[2] Каллипп (IV в. до Р. Х.) — греческий астроном. См.: Календарный вопрос / Сб. статей под ред. А. Чхартишвили. М., 2000. С. 244–245.

[3] Мы ведем нумерацию годов от Рождества Христова. Летоисчисление было предложено св. Дионисием Малым, составившим в 525 г. таблицы дат Пасхи на период с 532 по 626 гг. См.: *Dionysius Exiguus.* Liber de paschate, sive cyclus Paschalis // PL. 67. Col. 493–508 (лат. текст и англ. перевод можно найти по адресу: http://hbar.phys.msu.ru/gorm/chrono/paschata.htm).

[4] В этой формуле $\delta_4(n)$ есть функция, определенная на целых числах n, равная 1, если n делится на 4, и 0, если n не делится на 4. В дальнейшем будут использоваться и более общие функции $\delta_q(n)$, определяемые при любом натуральном q аналогично.

Минимальный период этой функции равен 4, и средняя продолжительность юлианского календарного года на отрезке длиной в период равна 365=365,25 дней.

Такая конструкция солнечного календаря была предложена александрийскими астрономами во главе с Созигеном. В 708 г. от «основания города»[5] указом Юлия Цезаря этот календарь был введен во всей Римской империи.

Отклонение n календарных лет от истинной продолжительности n тропических лет равно[6]

$$n\alpha - \left(365n + \left[\tfrac{n}{4}\right]\right) = \left(\alpha - 365\tfrac{1}{4}\right)n + \left\{\tfrac{n}{4}\right\} = -0{,}0078\ldots \cdot \mathrm{n} + \left\{\tfrac{n}{4}\right\}.$$

Составляющая $-0{,}0078\ldots \cdot \mathrm{n}$ меняется монотонно и примерно за 128 лет ее изменение достигает величины в 1 сутки. Продолжительность 128 астрономических лет примерно на 1 день короче 128 юлианских календарных годов, т. е. начала юлианских календарных годов со скоростью примерно 1 день за 128 лет сдвигаются по направлению к астрономической весне. Помимо монотонной имеется периодическая составляющая $\left\{\tfrac{n}{4}\right\}$, принимающая значения от 0 до $\tfrac{3}{4}$ суток. Если n велико, то периодическая составляющая дает относительно небольшой вклад в отклонение.

В дальнейшем мы будем именовать дни календарных годов общепринятыми названиями от 1 января до 31 декабря.

1.2. Месяцы. Лунные месяцы в юлианском календаре содержат по 30 или 29 дней. Существуют различные таблицы, показывающие распределение новолуний в календарных годах[7]. Мы следуем описанию из статьи Г. Кинкелина[8].

Распределение новолуний в юлианском календаре происходит по следующим правилам:

1. *Первое новолуние года, предшествовавшего 1 году после Р. Х., выпало на 23 января.*

2. *Лунные годы состоят последовательно из*

$$12, 12, 13, \; 12, 12, 13, \; 12, 13, \; 12, 12, 13, \; 12, 12, 13, \; 12, 12, 13, \; 12, 13 \tag{3}$$

лунных месяцев. Далее эти числа повторяются, образуя периодическую последовательность с периодом 19.[9] *Первый месяц каждого лунного года*

---

[5] 46 г. до Р. Х.

[6] Следующие далее вычисления используют две функции $\{x\}$ — *дробная часть* числа x и $[x]$ — *целая часть* числа x. Последняя равна наибольшему целому числу n с условием $\mathrm{n} \le x$, а дробная часть по определению есть $x - [x]$. Например, $[2\tfrac{3}{4}] = 2$, $\{2\tfrac{3}{4}\} = \tfrac{3}{4}$.

[7] См.: *Ginzel F. K.* Handbuch der mathematischen und technischen Chronologie. Bd. 3. Lpz., 1914. S. 136; *Лалош М.* Сравнительный календарь древних и новых народов. СПб., 1869[3]; *Эфросман А. М.* История календаря и хронология: К вопросу о происхождении нашего летосчисления // Историко-астрономические исследования. Вып. XVII. М., 1984.

[8] *Кинкелин Г.* Вычисление христианской пасхи / Пер. с немецкого и дополнения Н. Я. Сонина // Математический сборник. 1871. Т. 5. С. 73–92.

[9] Этот девятнадцатилетний календарный цикл известен под именем метонова цикла. Метон — греческий астроном, предложивший в середине 1-го тысячелетия до Р. Х. распределение 235 лунных месяцев по 19 лунным годам, согласующее продолжительности 19 календарных и 19 лунных годов. Этот цикл был известен также в Древних Вавилоне и Китае. Правило 2 можно было бы записать иначе, не указывая в нем последовательность длин лунных лет. Вместо этого

состоит из 30 дней. Далее продолжительности месяцев чередуются и состоят из 29, 30, 29 и т. д. дней.

Кроме того, нужно сделать две поправки.

3. *Если номер лунного года делится на 4, то ко второму месяцу нужно прибавить один день.*

4. *Если номер лунного года, увеличенный на 1, делится на 19, т. е. так называемое золотое число*[10] *года равно 19, из последнего месяца лунного года нужно отнять один день*[11].

Ясно, что эти правила однозначно определяют распределение лунных месяцев. Например, в году, предшествовавшем первому году после Р. Х., новолуния приходятся на следующие даты:

23.01, 22.02, 23.03, 22.04, 21.05, 20.06, 19.07, 18.08, 16.09, 16.10, 14.11, 14.12

Новолуние, следующее за последним в указанном списке (14+29 = 43 декабря = 12 января), является началом нового лунного года. Продолжая эти вычисления можно получить таблицу, содержащую даты новолуний юлианского календаря. Напомним, что это некоторые формальные даты, лишь приближающие с определенной точностью даты астрономических новолуний. Первый столбец этой таблицы содержит номера годов после Р. Х. При этом год, предшествующий первому году, имеет номер 0.

Таблица 1. Распределение новолуний юлианского календаря

О	30	29/30	30	29	30	29	30	29	30	29	30	29	30/29
0	23.01	22.02	23.03	22.04	21.05	20.06	19.07	18.08	16.09	16.10	14.11	14.12	-
1	12.01	11.02	12.03	11.04	10.05	9.06	8.07	7.08	5.09	5.10	3.11	3.12	-
2	1.01	31.01	1.03	31.03	29.04	29.05	27.06	27.07	25.08	24.09	23.10	22.11	21.12
3	20.01	19.02	20.03	19.04	18.05	17.06	16.07	15.08	13.09	13.10	11.11	11.12	-
4	9.01	8.02	9.03	8.04	7.05	6.06	5.07	4.08	2.09	2.10	31.10	30.11	-
5	29.12	28.01	26.02	28.03	26.04	26.05	24.06	24.07	22.08	21.09	20.10	19.11	18.12
6	17.01	16.02	17.03	16.04	15.05	14.06	13.07	12.08	10.09	10.10	8.11	8.12	-
7	6.01	5.02	6.03	5.04	4.05	3.06	2.07	1.08	30.08	29.09	28.10	27.11	26.12
8	25.01	24.02	25.03	24.04	23.05	22.06	21.07	20.08	18.09	18.10	16.11	16.12	-
9	14.01	13.02	14.03	13.04	12.05	11.06	10.07	9.08	7.09	7.10	5.11	5.12	-
10	3.01	2.02	3.03	2.04	1.05	31.05	29.06	29.07	27.08	26.09	25.10	24.11	23.12
11	22.01	21.02	22.03	21.04	20.05	19.06	18.07	17.08	15.09	15.10	13.11	13.12	-
12	11.01	10.02	11.03	10.04	9.05	8.06	7.07	6.08	4.09	4.10	2.11	2.12	-
13	31.12	30.01	28.02	30.03	28.04	28.05	26.06	26.07	24.08	23.09	22.10	21.11	20.12
14	19.01	18.02	19.03	18.04	17.05	16.06	15.07	14.08	12.09	12.10	10.11	10.12	-
15	8.01	7.02	8.03	7.04	6.05	5.06	4.07	3.08	1.09	1.10	30.10	29.11	-
16	28.12	27.01	25.02	27.03	25.04	25.05	23.06	23.07	21.08	20.09	19.10	18.11	17.12
17	16.01	15.02	16.03	15.04	14.05	13.06	12.07	11.08	9.09	9.10	7.11	7.12	-
18	5.01	4.02	5.03	4.04	3.05	2.06	1.07	31.07	29.08	28.09	27.10	26.11	25.12

достаточно было бы написать: *первое новолуние, следующее после 27 декабря, считается началом нового лунного года* (см. ниже таблицу 1). Выбранный нами способ прямо указывает на связь с метоновым циклом, с другой стороны, он удобнее для математического описания календаря.

[10] Золотое число года — порядковый номер года в 19-летнем цикле. Если n — номер года по Р. Х. и a — остаток от деления n на 19, $0 \leq a < 19$, то золотое число этого года равно $a + 1$.

[11] Поправка Каллиппа.

Дойдя до последнего года этой таблицы, в соответствии с правилом 4 мы должны к 25 декабря прибавить не 30, а 29, чтобы получить первое новолуние следующего лунного года[12]. Но оно приходится на 25+29=54 декабря = 23 января, т.е. дату, являющуюся первым новолунием года, имеющего в первом столбце номер 0. Это означает, что в дальнейшем все вычисления будут повторяться, так что распределение новолуний по датам календарного года зависит только от остатка, который имеет номер года от Р. Х. при делении на 19. Например, в 2008 г. имеем 2008=19·105+13, так что мартовские новолуния 2008 и 13 годов после Р. Х. приходятся на одни и те же календарные дни. С помощью таблицы находим, что мартовское календарное новолуние 2008 г. приходится на 30 марта. Таким образом, можно считать, что таблица 1 действительна для любого календарного года, а в столбце с буквой «О» представлены остатки от деления номера года от Р. Х. на 19.

Отметим одно важное обстоятельство, учтенное при составлении этой таблицы, но не заметное на первый взгляд. Рассмотрим строку таблицы, соответствующую году с номером 16 и начинающуюся с 28 декабря. Второе новолуние этого лунного года приходится на 27.01. А вот третье новолуние должно выпасть не на 25.02, как указано в таблице, а на 26.02. Ведь продолжительность второго лунного месяца, по правилу 2, должна быть равной 30 дням. Подобное несоответствие с февральскими новолуниями будет в каждом високосном лунном году, начинающемся в декабре. Для того чтобы исправить ситуацию, день второго лунного месяца, следующий за днем 24 февраля, не именуется, а следующий за ним день получает название 25 февраля. Т.е. в високосном году юлианского календаря лишний день вставляется между 24 и 25 февраля и никак не нумеруется. В результате даты всех февральских дней, следующих за вставленным днем, уменьшаются на единицу по сравнению со сплошной нумерацией, и соответствие с таблицей восстанавливается. Календарное правило вставлять лишний день между 24 и 25 февраля и не датировать его, конечно, совершенно отличается от соответствующего правила в принятом у нас гражданском григорианском календаре, где лишний день вставляется после 28 февраля и носит имя 29 февраля. Сказанное никак не затрагивает даты новолуний високосных годов, начинающихся в январе, их начала выпадают не позже 25 января, а значит, февральские новолуния приходятся не позже 24 февраля.

Известно, что 29 августа 284 г. (начало эры Диоклетиана) было днем новолуния, и, значит, первое новолуние 285 года пришлось на 23 января[13]. Учитывая, что $285 = 19 \cdot 15$, получаем, что первое новолуние календарного года, предшествующего первому году по Р. Х., также пришлось на 23 января. Это мотивирует выбор начала отсчета в п. 1 определения последовательности новолуний.

В продолжение строки заголовков, следующем за буквой «О», указаны числа дней до следующего новолуния, т. е. новолуния, указанного в следующем столбце. В заголовке третьего столбца стоят числа 29/30, означающие, что для получения следующего новолуния нужно, согласно правилу 3, прибавлять 30 или 29 в соответствии с тем, делится ли на 4 номер года, т. е. будет этот год високосным или нет. Дата следующего новолуния при этом будет одной и той же, ведь в високосном

[12] Это изменение регулярности в распределении новолуний, обеспечивающее замыкание 19-летнего цикла и происходящее один раз в 19 лет, называется «скачком Луны».

[13] Детали вычислений см. в: Календарный вопрос… С. 108.

году календарный месяц февраль содержит 29 дней, а в обычном — 28 дней. Точно так же в заголовке последнего столбца таблицы записано 29/30. В соответствии с правилом 4 в году с номером 18 к последнему новолунию нужно будет прибавлять 29, а в остальных лунных годах — по 30 дней.

Лунные годы юлианского календаря могут состоять из 354, 355, 383, 384 и 385 дней. Например, 2008 лунный год состоит из 385 дней, а 2013 — из 383 дней. Это легко можно определить с помощью таблицы 1.

Длина астрономического лунного месяца равна β = 29,530588… дней, поэтому в календаре лунные месяцы продолжительностью в 29 и 30 дней чередуются (см. правило 2). Их средняя величина равна 29,5 дней, что минимизирует отклонения календарных новолуний от астрономических.

Из сказанного также следует, что первые новолуния лунных годов с номерами $n+1$ и $n+20$ при любом целом $n \geq 0$ приходятся на одни и те же календарные числа. Значит, 19 последовательных лунных лет содержат столько же дней, как и последовательные 19 календарных лет с теми же номерами. Если номер года n делится на 4, то последующие 19 календарных лет содержат $15 \cdot 365 + 4 \cdot 366 = 6939$ дней. Если же n не делится на 4, эти годы содержат $14 \cdot 365 + 5 \cdot 366 = 6940$ дней. Каждые последовательные 76 календарных и лунных года содержат $6939 + 3 \cdot 6940 = 27759$ дней. Эти же 76 лунных года состоят из $4 \cdot 235 = 940$ месяцев. Далее отметим, что если номера двух календарных лет отличаются на $76 = 4 \cdot 19$, то эти годы содержат одинаковое количество дней (високосны или невисокосны одновременно), а кроме того, их первые новолуния приходятся на один день. Но тогда соответствующие лунные месяцы этих годов имеют равную продолжительность. Получаем равенство $g(n+940) = g(n)$, $n \geq 1$. Непосредственным вычислением можно проверить, что 940 есть наименьший период.

Можно проверить, что количество лунных месяцев в году с номером $n \geq 0$ (см. (3)), задается формулой[14]

$$12 + \left[\frac{7n+8}{19}\right] - \left[\frac{7n+1}{19}\right], \tag{4}$$

и, значит, n первых лунных лет, начиная с n=0, состоят из

$$12n + \left[\frac{7n+1}{19}\right], \tag{5}$$

месяцев. Средняя величина календарного лунного месяца равна $\frac{27759}{940}$ =29,53… дней. Как и в случае с календарными годами отклонение начал лунных годов от соответствующих астрономических новолуний можно разбить на монотонную и периодическую составляющие. Монотонная составляющая отклонения достигает величины в 1 день по прошествии 308 лет. Таким образом, каждые 308 лет календарные новолуния отстают от астрономических примерно на один день. Максимальное значение периодической составляющей есть $\frac{113}{470}$ = 0,240… суток, а минимальное равняется $-\frac{143}{94} = -1{,}521$… суток.

Количество дней, прошедших начиная с первого январского новолуния до 31 января, т. е. возраст луны на 31 января года с номером *n,* обозначим

[14] Для этого достаточно проверить, что последовательность (4) имеет период 19, а также совпадение начальных 19 членов (4) с (3).

символом $e(n)$.[15] Например, если новолуние выпадает на 1 января года с номером n, то $e(n)=30$, если же новолуние приходится на 30 января, то $e(n)=1$. Таким образом, $e(n)$ есть целое число, лежащее в пределах от 1 до 30, а $31 - e(n)$ — январская дата, на которую приходится первое январское новолуние n-го календарного года.

Из таблицы 1 легко найти эту последовательность. Ее первые 19 членов равны

$$8, 19, 30, 11, 22, 3, 14, 25, 6, 17, 28, 9, 20, 1, 12, 23, 4, 15, 26 \tag{6}$$

и далее эти числа повторяются, образуя периодическую последовательность с периодом 19. Можно проверить, что при любом целом $n \geq 0$

$$e(n) \equiv e(n-1) + \begin{cases} 11, \text{ если } n \text{ не делится на } 19, \\ 12, \text{ если } n \text{ делится на } 19 \end{cases} \pmod{30},\ 1 \leq e(n) \leq 30. \tag{7}$$

Например, из (6) следует, что $e(4) = 22$. Поэтому $e(5)$ равно остатку от деления 22+11 на 30, т. е. $e(5) = 3$. Из (6) и (7) находим

$$e(n) \equiv 8 + 11\mathrm{n} + \left[\tfrac{n}{19}\right] \pmod{30}, \quad 1 \leq e(n) \leq 30. \tag{8}$$

Из таблицы 1 следует, что в метоновом цикле из 19 лет новолуния могут выпадать только на 235 из 365 дней обычного календарного года. Так, например, ни одно из январских чисел 2, 4, 7, 10, 13, 15, 18, 21, 24, 26, 29 никогда не является календарным новолунием. В реальности так, конечно, не бывает. Подобное явление происходит и с другими календарными месяцами: примерно треть их дней не бывают новолуниями. Заметим, впрочем, что никакие два таких дня не стоят в календаре подряд.

1.3. Пасхалия. В соответствии с решениями I Вселенского Собора[16], состоявшегося в Никее в 325 г. по Р. Х., Пасха должна праздноваться в первый воскресный день *после* первого полнолуния, следующего не ранее весеннего равноденствия. Такое полнолуние называется пасхальным. При этом днем весеннего равноденствия считается 21 марта, а полнолуние должно наступать на 14 день лунного месяца[17].

---

[15] Эта величина тесно связана с так называемыми «основаниями» для вычисления даты Пасхи, см.: *Огицкий Д. П.* О расхождениях в определении дня праздника Пасхи // ЖМП. 1963. № 3. С. 68–74. «Основание» года с номером n есть целое число (обозначим его $O(n)$), лежащее в пределах от 1 до 30 и, как можно проверить, удовлетворяющее сравнению $O(n) \equiv e(n) + 3 \pmod{30}$. Используемая здесь запись $u \equiv v \pmod{m}$ обозначает, что разность двух целых чисел u и v делится на m. Другими словами, числа u и v имеют одинаковые остатки при делении на m. Мы будем использовать это общепринятое в теории чисел обозначение и далее.

[16] Подлинный текст определений Собора до нас не дошел.

[17] Пасхальное полнолуние называют также пасхальным пределом, или иудейской Пасхой. В формальной модели, — всегда считающей 21 марта днем весеннего равноденствия, а полнолуния всегда наступающими на 14 день каждого лунного месяца, что, конечно, крайне редко совпадает с реальностью, — первое полнолуние, следующее за 21 марта, считается формальным аналогом иудейской Пасхи (15 нисана), она начинает праздноваться с вечера 14 дня лунного месяца. В этом смысле пасхальное правило (воскресенье после первого полнолуния) аналогично правилу, предписывающему праздновать христианскую Пасху после иудейской.

Отказ от астрономических наблюдений для определения дней весеннего равноденствия и полнолуния и переход к формальным правилам вычисления этих дней естественно связан с решением I Вселенского Собора праздновать Пасху всем христианам в один день. Ведь большая удаленность христианских общин друг от друга и отсутствие быстрой связи не позволяли, например, жителям Рима точно определить момент наступления весеннего равноденствия в Иерусалиме[18].

Из таблицы 1 следует, что первые мартовские новолуния приходятся на те же самые числа, что и первые январские новолуния, т. е. на числа $31 - e\,(n)$ марта.

Обозначим через $V(n)$ номер дня в марте, на который приходится пасхальное полнолуние в n году. Так как согласно правилам полнолуние наступает на 14-й день лунного месяца, то в случае $e\,(n) \leq 23$ новолуние приходится на мартовский день с номером $31 - e\,(n)$ и $V(n) = 44 - e\,(n) \geq 21$. Если же $e\,(n) > 23$, то $31 - e\,(n) < 8$. Третий лунный месяц содержит 30 дней, поэтому следующее за $31 - e\,(n)$ четвертое новолуние наступает $61 - e\,(n)$ марта, а соответствующее полнолуние приходится на $74 - e\,(n)$ марта. При этом 32 марта считается совпадающим с 1 апреля и т. д. Собрав оба случая вместе, находим

$$V\,(n) = \begin{cases} 44 - e\,(n), & \text{если } e\,(n) \leq 23, \\ 74 - e\,(n), & \text{если } e\,(n) > 23 \end{cases} \equiv 14 - e\,(n) \pmod{30}. \qquad (9)$$

Пользуясь этим равенством и (7), получаем, что в любом случае выполняются условия

$$V(n) \equiv 6 + 19\,\mathrm{n} - \left[\tfrac{n}{19}\right] \pmod{30}, \qquad 21 \leq V(n) \leq 50, \qquad (10)$$

однозначно определяющие числа $V(n)$. Последовательность $V(n)$, $\mathrm{n} \geq 0$, пасхальных полнолуний

5 апр., 25 мар., 13 апр., 2 апр., 22 мар., 10 апр., 30 мар., 18 апр., 7 апр., 27 мар.,
15 апр., 4 апр., 24 мар., 12 апр., 1 апр., 21 мар., 9 апр., 29 мар., 17 апр.,

повторяющаяся с периодом 19, была известна Дионисию Малому[19].

Присвоим названиям дней недели номера: воскресенье — 0, понедельник — 1, вторник — 2, среда — 3, четверг — 4, пятница — 5 и суббота — 6. День недели в этих обозначениях, приходящийся на 21 марта года с номером n, обозначим символом $d\,(n)$. Обычный календарный год состоит из $365 = 7 \cdot 52 + 1$ дней, а високосный из $366 = 7 \cdot 52 + 2$ дней. Поэтому, как можно проверить, выполняется сравнение[20].

---

[18] С большой и многосложной историей становления правил определения даты Пасхи, которым более 800 лет следовали все христианские Церкви, и современными проблемами в этой области можно ознакомиться по следующим работам: Календарный вопрос…; Деяния Совещания глав и представителей Автокефальных Православных Церквей…; *Огицкий.* О расхождениях в определении дня праздника Пасхи…; *он же.* Проблема церковного календаря // БТ. № 4. 1968. С. 109–116.

[19] *Dionysius Exiguus.* Ibid.

[20] В течение длительного времени принятая на Руси система пасхальных расчетов использовала понятие «вруцелето». Каждому году ставилась в соответствие одна из семи букв: *аз, веди, глаголь, добро, есть, зело, земля*. Заменим указанные буквы цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 соответственно.

$$d\,(n) \equiv n + \left[\tfrac{n}{4}\right] \pmod 7, \quad 0 \le d\,(n) < 7, \tag{11}$$

Похожую формулу использует и Дионисий.

Обозначим буквой d день недели, на который приходится пасхальное полнолуние. Тогда $V\,(n) - d$ марта и $21 - d\,(n)$ марта приходятся на воскресные дни. Следовательно, $V(n) - d \equiv 21 - d\,(n) \pmod 7$ и

$$d \equiv V\,(n) + d\,(n) \equiv n + \left[\tfrac{n}{4}\right] + V\,(n) \pmod 7$$

Учитывая теперь, что $V\,(n) - d = P - 7$, где буквой P обозначено число в марте, на которое приходится пасхальное воскресение, заключаем $P = V\,(n) + 7 - d$.

Итак, *для того чтобы вычислить день Пасхи в календарном году с номером n, нужно с помощью условий*

$$V \equiv 6 + 19n - \left[\tfrac{n}{19}\right] \pmod{30}, \quad 21 \le V \le 50, \tag{12}$$

определить мартовскую дату пасхального полнолуния V, затем вычислить день недели d пасхального полнолуния

$$d \equiv n + \left[\tfrac{n}{4}\right] + V \pmod 7, \quad 0 \le \mathrm{d} \le 6. \tag{13}$$

Пасха приходится на мартовский день с номером

$$P = V + 7 - d \tag{14}$$

юлианского календаря.

При этом, конечно, нужно иметь в виду правило пересчета мартовских чисел в апрельские, если $P > 31$.

Функция (10), определяющая величину V, имеет период 19 и потому принимает не более 19 значений из промежутка $21 \le V\,(n) \le 50$. В частности, она не может равняться 50. Из неравенств $21 \le V \le 49$, $0 \le d \le 6$ следует, что $22 \le P \le 56$.

Итак, Пасха может попадать только на промежуток от 22 до 56 марта, т. е. от 22 марта до 25 апреля. Заметим, что если номера годов отличаются на 532, то в эти годы Пасха приходится на одно и то же число. Действительно, из равенства $19 \cdot 28 = 532$ и условий (12), (13) следует, что годы с номерами n и $n + 532$ имеют одинаковые значения величин V и d.

Составив таблицу дней Пасхи для, скажем, первых 532 лет по Р. Х., можно быстро находить пасхальное воскресенье для любого года. Доказанные выше формулы для вычисления Пасхи, см. (12)–(14), легко могут быть переписаны в классическом виде, принадлежащем К. Ф. Гауссу[21].

Таким способом году с номером n при счете от Р. Х. будет сопоставлено одно из указанных чисел, обозначим его *Вр (n)*. Можно проверить, что $Вр\,(n) \equiv d\,(n) + 4 \equiv n + 4 + \left[\tfrac{n}{4}\right] \pmod 7$. Еще одна использовавшаяся величина *круг Луны* — целое число, расположенное в пределах от 1 до 19. Если обозначить его $Кр\,(n)$, то можно проверить, что $Кр\,(n) \equiv n - 2 \pmod{19}$.

[21] *Gauss C. F.* Werke. Göttingen, 1927. Bd. 11. S. 199–200; Календарный вопрос… С. 338.

2. Григорианский календарь

Григорианский календарь основан на следующих диофантовых приближениях

$$\alpha - \frac{2081882250}{5700000} = -0{,}000302\ldots, \ \beta - \frac{2081882250}{70499183} = 0{,}000001\ldots\ .$$

Его 5700000 календарных, равно как и лунных, лет содержат по 2081882250 дней. Число 70499183, обеспечивающее достаточно хорошее согласование начал лунных годов с астрономическими новолуниями, примерно равно количеству астрономических новолуний, происходящих в течение 5700000 лет. Оно отлично от количества григорианских календарных новолуний на этом периоде, которое существенно больше и равно 70570000.

Новый календарь на смену юлианскому был введен в 1582 г. указом папы Григория XIII с целью привести календарную дату весеннего равноденствия, 21 марта, в соответствие с астрономическим равноденствием и изменить календарные правила так, чтобы в будущем по возможности уменьшить отклонения весеннего равноденствия и мартовских новолуний от астрономических. В частности, при этом были опущены 10 календарных дней, накопившихся вследствие «отставания»[22] юлианского календаря, т. е. после четверга 4 октября 1582 г. по юлианскому календарю последовала пятница 15 октября 1582 г. по григорианскому календарю.

Основными авторами календарной реформы принято считать Л. Лилио, предложившего заменить метонов цикл циклом эпакт (см. ниже), и К. Клавия, опубликовавшего в 1603 г. подробное описание нового календаря с учетом изменений, внесенных в него комиссией по реформе[23].

2.1. Годы. В григорианском календаре годы состоят из 365 или 366 дней. Длина календарного года вычисляется по формуле

$$f(n) = 365 + \delta_4(n) - \delta_{100}(n) + \delta_{400}(n), \tag{15}$$

т. е. високосными считаются годы, номера которых делятся на 4, за исключением годов столетий, номера которых не делятся на 400.

Средняя продолжительность григорианского года равна

$$365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} = \frac{2081882250}{5700000} = 365\frac{97}{400} = 365{,}2425$$

дней, что лучше по сравнению с юлианским календарем приближает истинную длительность солнечного года: $\alpha - 365\frac{97}{400} = -0{,}000301\ldots$. Периодическая часть отклонения от n тропических лет принимает значения от –0,72 до 1,4775 суток, а монотонная становится превышающей 1 сутки примерно за 3300 лет.

[22] Юлианский календарный год чуть длиннее астрономического года.

[23] Подробное описание истории принятия нового календаря можно найти в трудах конференции, посвященной 400-летию этого события, см.: Gregorian Reform of the Calendar: Proceedings of the Vatican Conference to Commemorate its 400th Anniversary 1582–1982 / Ed. G. V. Coyne, M. A. Hoskin, O. Pedersen. Specola Vaticana, 1983.

2.2. Месяцы. Последовательность новолуний григорианского календаря вычисляется по более сложным, чем в юлианском календаре, правилам. Для их описания нужно ввести еще одну характеристику календарного года — так называемую эпакту[24]. Согласно исторической традиции в описаниях григорианского календаря словом «эпакта» обозначаются два различных понятия — возраст луны на определенный момент и распределение новолуний в текущем году. Это приводит к трудностям в понимании и объяснении правил пользования календарем.

Принято называть эпактой календарного года возраст луны на начало этого года[25]. Так, если текущий календарный год содержит 365 дней, а соответствующий лунный год — 354 дня, и новолуние выпадает на 1 января, то в первый день текущего года возраст луны будет равен 0, а в первый день следующего календарного года 365–354=11 дней. Другими словами, можно сказать, что эпакта есть избыток дней солнечного года над соответствующим лунным[26]. Таким образом, эпакта равна целому числу, лежащему в пределах от 0 до 29.

Вместе с тем, согласно упомянутым выше источникам, существуют также 32 различных эпакты, обозначаемых по Л. Лилио символами[27]

$$\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}, \ldots, \mathrm{XXIX}, \mathrm{XXX}, 19, 25, \tag{16}$$

Здесь присутствуют латинские обозначения первых 30 натуральных чисел и арабские обозначения натуральных чисел 19, 25. Обозначение XXX иногда заменяется нулем или символом «*». Эпакта календарного года однозначно указывает распределение новолуний в этом году. Таким образом, согласно григорианскому календарю, новолуния в пределах календарных годов могут распределяться лишь одним из 32 способов.

Иногда эти два разных понятия, обозначаемые одним словом, приходят в противоречие друг с другом. Так эпакты 1895, 2400 и 4700 гг., понимаемые как распределения новолуний, равны IV[28]. В эти годы новолуния распределяются одинаковым способом. В то же время последние календарные новолуния 1894, 2399 и 4699 гг. приходятся на 28 декабря, 29 декабря и 27 декабря соответственно[29]. Эпакты, понимаемые как возраст луны на 1 января 1895, 2400, 4700 гг., равны 4, 3 и 5 дней соответственно. Только в случае 1895 г. возраст луны совпадает с эпактой IV — явное противоречие с определением эпакты как возраста луны на 1 января.

2.2.1. Таблица эпакт. В дальнейшем мы будем разделять упомянутые понятия, сохранив название «эпакта» за *распределением новолуний* в календарном году. Например, если эпакта года равна XXV, новолуния приходятся на числа

$$6.01, 5.02, 6.03, 5.04, 4.05, 3.06, 2.07, 30.08, 29.09, 28.10, 27.11, 26.12,$$

[24] Греч. слово ἐπακταί (лат. epactae) употреблялось в связи с календарными вычислениями и до григорианской реформы, например, у Епифания Кипрского, в Пасхальной хронике и в «Обозрении истории» Георгия Кедрина, в «Liber de paschate» Дионисия Малого.

[25] Calendar // Encyclopaedia Britannica. 1910–1911. Vol. 4. P. 987–1004, здесь P. 994; Gregorian reform of the calendar… P. 206; *Кинкелин*. Вычисление христианской пасхи. С. 80.

[26] *Kennedy T*. Epact // Catholic encyclopedia: http://www.newadvent.org/cathen/05480b.htm.

[27] Gregorian reform of the calendar… P. 212–213.

[28] См. таблицу III в: Calendar // Encyclopaedia Britannica. 1910–1911. Vol. 4. P. 987–1004.

[29] Ibid. (таблицы III и IV).

т. е. на 6 января, 5 февраля и т. д. Если же календарный год имеет эпакту 25, то новолуния выпадают на

6.01, 4.02, 6.03, 4.04, 4.05, 2.06, 2.07, 30.08, 28.09, 28.10, 26.11, 26.12,

Все новолуния для каждой из 32 эпакт можно свести в одну таблицу (см. таблицу 2). В ней дни года обозначены теми же символами, что и эпакты. Символ, стоящий на месте определенного дня, показывает, в годы с какими эпактами новолуние приходится на этот день. Особо указано распределение новолуний для эпакты, обозначаемой 19. Эта эпакта случается крайне редко, и число 19 стоит лишь в клетке, соответствующей 31 декабря. Остальные новолуния такого календарного года совпадают с днями, обозначенными в таблице 2 символом XIX.

Если не обращать внимания на эпакты 19 и 25, можно заметить, что таблица 2 составлена следующим способом. В столбце, обозначенном «Янв.», начиная с символов *XXX, XXIX*, в убывающем порядке поставлены все римские обозначения целых чисел до *I*. Затем эта последовательность повторяется 12 раз. Последовательность с номером 13 неполная. В получившемся распределении чисел по дням календарного года расстояния между одинаковыми знаками равны 30 дней. Затем получившиеся отрезки с четными номерами укорачиваются на один день за счет того, что эпакты *XXIV* и *XXV* сдваиваются. В результате расстояния в днях между соседними новолуниями годов с эпактами, обозначенными римскими числами, чередуются по 30 и 29 дней. Распределения новолуний, соответствующие эпактам 25 и 19, введены для исправления некоторых нежелательных эффектов, об этом речь пойдет ниже.

Таблица 2. Распределение новолуний григорианского календаря[30]

Дни	Янв.	Фев.	Мар.	Апр.	Май	Июн.	Июл.	Авг.	Сен.	Окт.	Нояб.	Дек.
1	XXX	XXIX	XXX	XXIX	XXVIII	XXVII	XXVI	XXV XXIV	XXIII	XXII	XXI	XX
2	XXIX	XXVIII	XXIX	XXVIII	XXVII	25 XXVI	25 XXV	XXIII	XXII	XXI	XX	XIX
3	XXVIII	XXVII	XXVIII	XXVII	XXVI	XXV XXIV	XXIV	XXII	XXI	XX	XIX	XVIII
4	XXVII	25 XXVI	XXVII	25 XXVI	25 XXV	XXIII	XXIII	XXI	XX	XIX	XVIII	XVII
5	XXVI	XXV XXIV	XXVI	XXV XXIV	XXIV	XXII	XXII	XX	XIX	XVIII	XVII	XVI
6	25 XXV	XXIII	25 XXV	XXIII	XXIII	XXI	XXI	XIX	XVIII	XVII	XVI	XV
7	XXIV	XXII	XXIV	XXII	XXII	XX	XX	XVIII	XVII	XVI	XV	XIV
8	XXIII	XXI	XXIII	XXI	XXI	XIX	XIX	XVII	XVI	XV	XIV	XIII
9	XXII	XX	XXII	XX	XX	XVIII	XVIII	XVI	XV	XIV	XIII	XII
10	XXI	XIX	XXI	XIX	XIX	XVII	XVII	XV	XIV	XIII	XII	XI
11	XX	XVIII	XX	XVIII	XVIII	XVI	XVI	XIV	XIII	XII	XI	X
12	XIX	XVII	XIX	XVII	XVII	XV	XV	XIII	XII	XI	X	IX
13	XVIII	XVI	XVIII	XVI	XVI	XIV	XIV	XII	XI	X	IX	VIII

[30] Таблица взята из: Calendar // Encyclopaedia Britannica (таблица IV). Для экономии места мы удалили доминиканские буквы.

14	XVII	XV	XVII	XV	XV	XIII	XIII	XI	X	IX	VIII	VII
15	XVI	XIV	XVI	XIV	XIV	XII	XII	X	IX	VIII	VII	VI
16	XV	XIII	XV	XIII	XIII	XI	XI	IX	VIII	VII	VI	V
17	XIV	XII	XIV	XII	XII	X	X	VIII	VII	VI	V	IV
18	XIII	XI	XIII	XI	XI	IX	IX	VII	VI	V	IV	III
19	XII	X	XII	X	X	VIII	VIII	VI	V	IV	III	II
20	XI	IX	XI	IX	IX	VII	VII	V	IV	III	II	I
21	X	VIII	X	VIII	VIII	VI	VI	IV	III	II	I	XXX
22	IX	VII	IX	VII	VII	V	V	III	II	I	XXX	XXIX
23	VIII	VI	VIII	VI	VI	IV	IV	II	I	XXX	XXIX	XXVIII
24	VII	V	VII	V	V	III	III	I	XXX	XXIX	XXVIII	XXVII
25	VI	IV	VI	IV	IV	II	II	XXX	XXIX	XXVIII	XXVII	XXVI
26	V	III	V	III	III	I	I	XXIX	XXVIII	XXVII	25 XXVI	25 XXV
27	IV	II	IV	II	II	XXX	XXX	XXVIII	XXVII	XXVI	XXV XXIV	XXIV
28	III	I	III	I	I	XXIX	XXIX	XXVII	25 XXVI	25 XXV	XXIII	XXIII
29	II		II	XXX	XXX	XXVIII	XXVIII	XXVI	XXV XXIV	XXIV	XXII	XXII
30	I		I	XXIX	XXIX	XXVII	XXVII	25 XXV	XXIII	XXIII	XXI	XXI
31	XXX		XXX		XXVIII		25 XXVI	XXIV		XXII		19 XX

2.2.2. Возраст луны. Обозначим, как и при описании юлианского календаря, символом *e (n)* возраст луны на 31 января, т. е. количество дней прошедших от первого январского новолуния до 31 января *n*-го года. Напомним, что функция *e (n)* принимает целые значения в пределах от 1 до 30.

В григорианском календаре для каждого года вычисляется по некоторым правилам январское новолуние, а затем определяется эпакта этого года, т. е. распределение остальных новолуний.

Перейдем к описанию правил вычисления январских новолуний, т. е. значений функции *e (n)*. В качестве определения можно принять соотношение

$$e\,(n) \equiv e\,(n{-}1) + \Delta \pmod{30},$$

где целое число Δ полагается равным 11, а затем корректируется в соответствии со следующими правилами:

B1. Если номер текущего года *n* делится на 19, то к Δ прибавляется 1, сравните с (7).

B2. Если *n* делится на 100, но не делится на 400 (т. е. текущий год является годом столетия, но не високосным), то из Δ вычитается 1,

B3. Если при делении на 2500 номер *n* дает в остатке одно из восьми чисел

$$200, 500, 800, 1100, 1400, 1800, 2100, 2400,$$

то Δ увеличивается на 1. Например, при

$$n = 15200 = 19 \cdot 800 = 400 \cdot 38 = 6 \cdot 2500 + 200$$

имеем $\Delta = 13$.

Второе правило связано с формулой (15) вычисления продолжительности григорианского календарного года. Это так называемое «солнечное уравнение». Третье правило, «лунное уравнение», вызвано желанием сделать отклонения январских и, следовательно, мартовских календарных новолуний от соответствующих астрономических новолуний по возможности меньшими.

Указанные выше правила означают, что

$$e\,(n) \equiv 8+11\mathrm{n} + \left[\frac{n}{19}\right] - \left[\frac{n}{100}\right] + \left[\frac{n}{400}\right] + \left[\frac{8s+13}{25}\right] \pmod{30}, \quad 1 \le e\,(n) \le 30, \qquad (17)$$

где $s = \left[\frac{n}{100}\right]$. Здесь учтено также, что в 1582 году возраст луны был принят равным 26. Эта формула определяет январские новолуния в григорианском календаре[31]. Для сравнения с аналогичной формулой юлианского календаря см. (8). Можно проверить, что функция *e (n)* григорианского календаря имеет период 5700000, причем это есть ее наименьший период.

2.2.3. Вычисление эпакты года. Эпакты тесно связаны с возрастом луны на 31 января и определяются тремя правилами.

Э1. Если *e (n)* не равно 19 или 25, то эпакта полагается равной записи *e (n)* в римской системе нумерации, т. е. одному из символов *I, II, …, XXX*.

Э2. В случае $e\,(n) = 25$ эпакта года зависит от остатка при делении n на 19, обозначим его буквой a, $0 \le a < 19$. Если $a > 10$, то эпакта календарного года с номером n есть 25, в случае же $a \le 10$ полагают эпакту равной *XXV*.

Э3. В случае $e\,(n) = 19$ и $n \equiv 18 \pmod{19}$, эпакту календарного года с номером n полагают равной 19, в остальных же случаях с $e\,(n) = 19$ она есть *XIX*.

Таким образом, возраст луны на 31 января *e (n)* определяет эпакту календарного года единственным образом лишь в случаях, если этот возраст отличен от 25 и 19. Значение $e\,(n) = 25$ соответствует двум различным эпактам, обозначаемым 25 и XXV, а значение $e\,(n) = 19$ — эпактам 19 и XIX. Укажем некоторые причины раздвоения эпакт при $e\,(n) = 25$ и $e\,(n) = 19$.

Легко проверить, что $e\,(1905) = 24$ и $e\,(1916) = 25$. Золотые числа этих годов равны соответственно 6 и 17, т. е. годы лежат в одном метоновом цикле. Эпакта 1905 г. равна XXIV, и если бы эпакта 1916 года равнялась XXV, то согласно таблице 2 в этих двух годах совпали бы 6 новолуний. Чтобы избежать подобных совпадений в пределах одного цикла и была введена эпакта 25, отличная от XXV, см. правило Э2. В годы с 1900 по 4000 правило Э2 приходится употреблять в 40 случаях.

Правило Э3 мотивировано тем, что в случае $e\,(n) = 19$ и $n \equiv 18 \pmod{19}$ возможно выполнение сравнения

$$e\,(n+1) \equiv e\,(n) + 12 \pmod{30} \equiv 1 \pmod{30},$$

т.е. $e\,(n+1) = 1$. Если бы год с номером n имел эпакту *XIX*, то согласно таблице 2 последнее новолуние года с номером n пришлось бы на 2 декабря. Год с номером

[31] С точностью до обозначений эта формула совпадает с формулой (13) из работы: *Кинкелин.* Вычисление христианской пасхи.

$n + 1$ имел бы эпакту *I* и его январское новолуние приходилось бы на 30 января. Таким образом, возник бы лунный месяц длиной в 59 дней. Чтобы избежать этого, в году с номером n выбирается распределение месяцев, отличное от эпакты *XIX*, а именно то, в котором отсутствующее в *XIX* новолуние выпадает на 31 декабря.

Если годы с номерами u и v лежат в пределах одного столетия и имеют одинаковые золотые числа, то согласно правилам вычисления эпакт отсюда следует, что годы с номерами u и v имеют одинаковые эпакты.

Заметим, что приведенные выше правила вычисления эпакт дают в точности те же результаты, что и справедливая до 8799 года классическая таблица эпакт[32].

Последовательность эпакт, как и последовательность значений $e(n)$ также имеет период 5700000, откуда следует, что григорианский календарь имеет период 5700000 лет.

2.2.4. Аномалии. Функция $e(n)$, принятая в григорианском календаре, слишком сложна для того, чтобы можно было теоретически подтвердить отсутствие тех или иных нежелательных свойств в задаваемой ею последовательности. В то же время ее период 5700000 слишком длинен для того, чтобы в конце XVI века можно было проверить отсутствие этих свойств на практике. В настоящее время компьютерные вычисления легко позволяют проводить исследование свойств последовательности $e(n)$ на всем периоде. До 8800 года результаты наших вычислений, приводимые в следующих примерах, легко могут быть проверены с помощью классических таблиц (таблицы III и IV в: Calendar // Encyclopaedia Britannica).

1. Легко проверить, что годы с номерами 1697 и 1708 лежат в одном 19-летнем цикле. Вместе с тем их эпакты равны *VII*. Этот пример показывает, что в григорианском календаре в пределах одного 19-летнего цикла возможны годы, имеющие одинаковое распределение новолуний. В реальности подобные явления, конечно, невозможны. Указанный пример не единственный. Метонов цикл с 1691 по 1709 гг. содержит 8 пар годов с одинаковыми эпактами и, значит, одинаковыми распределениями новолуний. А метонов цикл с 2185 по 2204 г. содержит 4 таких пары. Интересно, что первый пример относится к годам, расположенным вблизи сроков введения григорианского календаря.

2. На временном отрезке в 5700000 лет правило Э2, определяющее эпакту 25, используется 74808 раз. Рассмотрим годы с номерами 3594, 3602, лежащие в пределах последовательных 19 лет. Их эпакты равны соответственно *XXV, XXIV*. Это значит, что годы с номерами 3594, 3602 имеют совпадающие даты новолуний в шести месяцах. Имеется 704 подобных совпадения на отрезке длиной в период функции $e(n)$. Именно от них хотели уйти авторы григорианского календаря, вводя правило Э2. Как показывает наш пример, предложенное ими решение не исключает такие совпадения полностью.

3. Годы с номерами 13592 и 13600 имеют эпакты XXVI и 25 соответственно. Значит, в этих годах будет 6 совпадающих новолуний. Если бы эпакта года с номером 13600 равнялась XXV, совпадений не было бы. Таким образом, правило Э2 вычисления эпакт григорианского календаря приводит к совпадениям новолуний там, где их не должно было быть. Всего на периоде в 5700000 лет имеется 512 таких случаев.

[32] См. таблицу III в: Calendar // Encyclopaedia Britannica.

4. Годы с номерами 3393, 3404 удалены друг от друга менее чем на 19 лет. Их эпакты равны соответственно 25 и *XXVI*, что дает совпадения новолуний в шести месяцах. Уходя с помощью правила Э2 от года 3382 с эпактой *XXIV*, календарь приводит к совпадению новолуний в годах с номерами 3393 и 3404.

5. Легко проверить с помощью таблицы, что возраст луны на 1 января года с номером $n + 1$ равен

$$\begin{cases} 11 + e(n), & \text{если эпакта года с номером } n \text{ равна одному из символов } I, II, \ldots, XIX, \\ 1, & \text{если эпакта года с номером } n \text{ равна } 19, \\ e(n) - 19, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{18}$$

В период с 1600 по 2600 г. численное значение эпакты 52 раза не совпадает с возрастом луны на 1 января. Так, последнее новолуние 1699 года приходится на 22 декабря и возраст луны на 1 января 1700 г. равен 10 дней, но эпакта 1700 года есть IX (см. таблицы III и IV в: Calendar // Encyclopaedia Britannica). Точно так же возраст луны на 1 января 2014 г. равен 28 дней, но эпакта 2014 года равна XXIX. Это несогласие традиционных определений заставило нас выбрать возраст луны на 31 января в качестве одной из характеристик при описании григорианского календаря.

6. Как следует из таблицы 2, все лунные месяцы григорианского календаря за исключением последних месяцев лунных годов состоят из 29 или 30 дней. Впрочем, в високосном году могут возникать месяцы продолжительностью в 31 день. Так, эпакта 2008 г. равна XXII, и лунный месяц этого года, начинающийся 7 февраля в соответствии с таблицей 2, должен завершиться 8 марта, т. е. состоит из 30 дней. Но к ним добавляется еще один день, вставляемый в феврале, ведь 2008 — високосный год.

7. Длины последних месяцев лунных годов зависят от значений $e\ (n)$ и $e\ (n + 1)$ и получаются, как можно видеть, добавлением числа $30 - e\ (n + 1)$ к числам, стоящим в формуле (18). Итак, длина последнего месяца лунного года с номером n равна

$$\begin{cases} 41 + e(n) - e(n+1), & \text{если эпакта этого года равна одному из символов } I, II, \ldots, XIX, \\ 31 - e(n+1), & \text{если эпакта этого года равна } 19, \\ 11 + e(n) - e(n+1), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

С помощью этой формулы можно указать примеры лунных годов, в которых продолжительность последнего месяца равна 1, 28, 31, 58 или 59 дням. Все они связаны со случаями, когда $e\ (n + 1) - e\ (n) \equiv 10, 12, 13 \pmod{30}$. Рассмотрим соответствующие примеры.

а) Как уже говорилось выше, в случае одновременного выполнения равенств $e\ (n) = 19$, $e\ (n + 1) = 1$ в григорианском календаре появляются месяцы длиной в 59 дней, продолжающиеся от 2 декабря до 29 января. На отрезке длиной в 5700000 лет имеется 10085 таких случаев. Эпакта 19 была введена для того, чтобы исключить возникающие таким образом 59-дневные месяцы. И она действительно исключает большинство из них. Однако имеется 144 случая, наименьший из них $n = 16399$, когда условие $e\ (n) = 19$, $e\ (n + 1) = 1$ выполняется при

$n \not\equiv 18 \pmod{19}$, т. е. в случае, когда эпакта года равна *XIX*. В таких годах григорианский календарь имеет месяцы продолжительностью в 59 дней. В действительности это означает, что календарь теряет астрономическое новолуние. Этот эффект, как и ряд других подобных ему, обнаружил в 2004 году Д. Рожель[33].

б) Имеется также 8 случаев, наименьший из них $n = 106399$, когда выполняются равенства $e\ (n) = 18$, т. е. эпакта года равна *XVIII*, и $e\ (n + 1) = 1$, приводящие к лунным месяцам продолжительностью в 58 дней.

в) В 918 случаях (наименьшие из них $n = 699, 1299, 4199$) выполняются равенства $e\ (n) = 20$, $e\ (n + 1) = 30$. У года с номером n новолуние приходится на 31 декабря, а у года с номером $n + 1$ — на 1 января. Возникает месяц продолжительностью в 1 день. По существу это означает, что григорианский календарь вставляет два календарных новолуния вместо одного астрономического.

г) Имеется 51 случай, наименьший из них $n = 43699$, когда эпакта года с номером n равна 19 и $e\ (n + 1) = 30$. Новолуния в этих случаях приходятся на 31 декабря n-го года и 1 января $(n + 1)$-го года. Опять возникают однодневные месяцы.

Случаи б)–г) также обнаружены в работе Д. Рожеля.

д) В случаях $e\ (n + 1) - e\ (n) = 10$, $e\ (n) < 19$, например, при $n = 2199$, имеем последний лунный месяц продолжительностью в 31 день. Такой же продолжительности будет последний лунный месяц и при $e\ (n) - e\ (n + 1) = 20$, например, в случаях $n = 1699$ или 2299. А при $e\ (n) - e\ (n + 1) = 17$, $e\ (n) > 19$, например, в случае $n = 15199$ последний лунный месяц будет иметь длину 28 дней. Такой же продолжительности будет последний лунный месяц и при $e\ (n + 1) - e\ (n) = 13$, например, в случае $n = 37999$.

2.2.5. Лунные отклонения. Любые идущие подряд 5700000 календарных лет содержат столько же дней, как и идущие подряд 5700000 лунных лет, а именно — 2081882250 дней. Можно сосчитать, что период в 5700000 лет содержит 70570000 новолуний. Однако среди лунных месяцев содержатся как обычные месяцы продолжительностью в 29 и 30 дней, так и странные месяцы, содержащие по 1,58 и 59 дней. Поэтому средняя длина лунного месяца на периоде григорианского календаря 2081882250/70570000 = 29,50095… не очень хорошо приближает длину астрономического месяца. Лучшим приближением является дробь $b = \frac{2081882250}{70499183}$, для которой имеем $\beta - b = 0{,}000001\dots$.

Пусть m — номер новолуния, ближайшего к началу лунного года с номером n, где счет начинается с января 1600 года. Можно проверить, что монотонная часть отклонения начала n-го лунного года от m-го новолуния не превышает 1 суток в течение первых 40000 лет. Значит, величина отклонения в основном определяется его периодической частью, и в указанный период времени начала лунных лет смещаются относительно истинных новолуний, то отставая от них, то опережая, но не удаляясь от них более чем на три дня.

2.3. Григорианская пасхалия. Принятое в Католической Церкви правило вычисления григорианской Пасхи совпадает с каноническим: Пасха празднуется в воскресенье после первого полнолуния, следующего за весенним

---

33 *Roegel D.* The Missing Moon of A. D. 16399 and Other Anomalies of the Gregorian Calendar, 2004 (полный текст статьи см. по адресу: http://www.loria.fr/roegel/articles/epact19.pdf).

равноденствием или совпадающего с ним. Для вычисления дня григорианской Пасхи внесем необходимые изменения в формулы, вычисляющие пасхальное полнолуние и день недели 21 марта. Естественно, при этом будет считаться, что возраст луны на 31 марта *e (n)* вычисляется по формуле григорианского календаря (17).

Как и ранее, число мартовского полнолуния будем обозначать символом *V (n)*. Если внимательно просмотреть рассуждения, предшествующие юлианской формуле (9), можно заметить, что отличия связаны с вычислением пасхального новолуния в случае, если первое мартовское новолуние происходит слишком рано, а именно — до 8 марта. Этому соответствует неравенство $e\ (n) > 23$. В юлианском календаре все третьи лунные месяцы содержат по 30 дней. В григорианском же эти месяцы для эпакт XXIV и 25 — и только для них, как легко проверить по таблице III из: Calendar // Encyclopaedia Britannica, — содержат 29 дней. В этих случаях происходит уменьшение даты на 1, и григорианское пасхальное полнолуние в отличие от (10) вычисляется по формулам:

$$V\ (n) = \begin{cases} 49, \text{ если } e\ (n) = 24, \\ 48, \text{ если } e\ (n) = 25 \text{ и } a > 10, \\ 14 - e\ (n) \pmod{30}, 21 \le V\ (n) \le 50, \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Здесь, как и при определении эпакты 25, буквой *a* обозначен остаток от деления *n* на 19, $0 \le a < 19$. Из этой формулы легко следует, что равенство $V\ (n) = 50$ не выполняется ни при каком *n*. Максимальное значение *V (n)* равно 49 и принимается для годов, номера которых удовлетворяют равенству $e\ (n) = 24$, а также равенству $e\ (n) = 25$ при условии $a \le 10$, т. е. для годов, эпакты которых равны XXIV или XXV. Минимальное значение *V (n)* равно 21, оно принимается в годах с условием $e\ (n) = 23$. Итак, пасхальное полнолуние может выпасть на любой день из промежутка от 21 марта до 18 апреля.

День недели 21 марта года с номером *n*, как и ранее, будем обозначать символом *d (n)*. Подобно тому, как это делалось в случае юлианского календаря, находим[34] при $n \ge 1600$

$$d\ (n) \equiv 2 + n + [\tfrac{n}{4}] - [\tfrac{n}{100}] + [\tfrac{n}{400}] \pmod{7}. \qquad (19)$$

Обозначив буквой *d* день недели, на который приходится пасхальное полнолуние, как и ранее, находим

$$d \equiv V(n) + d\,(n) \pmod{7}, 0 \le d \le 6, \text{ и } P = V(n) + 7 - d.$$

Итак, *для того чтобы вычислить день григорианской Пасхи по новому стилю в календарном году с номером n, нужно сначала с помощью формулы (17) вычислить e (n) — возраст луны на 31 января, затем с помощью условий*

[34] При вычислении григорианской Пасхи используются так называемые доминиканские буквы A, B, C, D, E, F, G. Каждому году сопоставляется одна из этих букв. Если их обозначить в порядке следования цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, то году с номером *n* таким способом будет сопоставлено одно из указанных чисел, которое будем обозначать как *DL* (*n*). Можно проверить, что $DL\ (n) \equiv 3 - d\ (n) \equiv 1 - n - [\tfrac{n}{4}] + [\tfrac{n}{100}] - [\tfrac{n}{400}] \pmod{7},\ 1 \le DL\ (n) \le 7.$

$$V(n) = \begin{cases} 49, \text{ если } e(n) = 24, \\ 48, \text{ если } e(n) = 25 \text{ и } n - 19 \cdot \left[\frac{n}{19}\right] > 10, \\ 14 - e(n) \pmod{30}, 21 \le V \le 50, \text{ в остальных случаях,} \end{cases} \tag{20}$$

определить V — дату пасхального полнолуния, и с помощью условий

$$d = 2 + n + \left[\tfrac{n}{4}\right] - \left[\tfrac{n}{100}\right] + \left[\tfrac{n}{400}\right] + V \pmod 7, \quad 0 \le d \le 6 \tag{21}$$

определить d — день недели пасхального полнолуния. Тогда Пасха приходится на мартовский день с номером

$$P = V + 7 - d \tag{22}$$

При этом, конечно, нужно иметь в виду правило пересчета мартовских чисел в апрельские, если P > 31.

Из полученных выше правил вычисления григорианской Пасхи нетрудно вывести классические формулы К. Ф. Гаусса[35]. Заметим, что оригинальные формулы Гаусса рассчитаны на ограниченный период времени. В работе Г. Кинкелина содержится более общий вариант. Григорианская Пасха всегда приходится на период с 22 марта по 25 апреля по григорианскому календарю.

Из формул (2) и (15) следует, что превышение дат юлианского календарного года с номером $n \ge 1600$ над такими же датами григорианского года с номером n равно $\left[\frac{n}{100}\right] - \left[\frac{n}{400}\right] - 2$ дней. Здесь учтено, что такое превышение в 1600 г. составляло 10 дней. Например, 1 января 2008 г. по «старому» стилю (юлианский календарь) случилось на 20 – 5 – 2 = 13 дней позже, чем 1 января того же года по григорианскому календарю, т. е. 14 января по «новому» стилю. В 2100 г. это превышение равно 21 – 5 – 2 = 14 дней, так что в 2101 г. православные, пользующиеся в обыденной жизни григорианским календарем, впервые будут праздновать Рождество Христово 8 января по «новому» стилю. Формула, определяющая превышение юлианских дат над григорианскими, верна, в частности, для всех мартовских и апрельских дат. Поэтому, если обозначить $P_{ю}(n)$ и $P_{г}(n)$ даты Пасхи по юлианскому и григорианскому календарям, то православная Пасха случится на

$$P_{ю}(n) - P_{г}(n) + \left[\frac{n}{100}\right] - \left[\frac{n}{400}\right] - 2$$

дней позже, чем католическая. С помощью этой формулы и приведенных выше правил вычисления Пасхи по юлианскому и григорианскому календарям такое превышение легко рассчитать для любого года. Например, в 2010 и 2011 гг. православные и католики будут праздновать Пасху в один день. Слагаемое $\left[\frac{n}{100}\right] - \left[\frac{n}{400}\right] - 2$ в последней формуле возрастает неограниченно, а каждое из чисел $P_{ю}(n)$, $P_{г}(n)$ принадлежит интервалу от 22 до 56. Поэтому, начиная с некоторого момента, православная Пасха всегда будет праздноваться после католической. Последний раз эти праздники совпадут в 2698 году.

[35] См.: *Кинкелин*. Вычисление христианской пасхи. С. 86; *Gauss*. Werke. Bd. 11. S. 199–200.

3. Вариации

В этом параграфе мы обсудим, как, следуя принципам юлианского календаря и имея некоторые приближения $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ к длительностям солнечного года и месяца, построить календарь, соответствующий этим приближениям. Числа $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ — рациональные приближения к числам α и β — равны средним значениям функций $f(n)$, $g(n)$, а отношение $\tau = \bar{\alpha}/\bar{\beta}$ есть среднее количество месяцев, приходящееся на один лунный год, т. е. среднее значение функции $h(n)$. Зная эти средние значения, можно восстановить и сами функции. Например, представив $\bar{\alpha}$ в виде

$$\bar{\alpha} = 365 + \frac{\varepsilon_1}{q_1} + \ldots + \frac{\varepsilon_r}{q_r},$$

где $\varepsilon_i = \pm 1$ и q_i — некоторые натуральные числа, можно выбрать функцию $f(n)$, в виде

$$f(n) = 365 + \sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \delta_{q_i}(n + a_i)$$

с некоторыми целыми числами a_i. При этом нужно следить, чтобы сумма $\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \delta_{q_i}(n + a_i)$ ни при каком n не была бы отрицательной и не превосходила 1. Выбор функции $f(n)$ для юлианского и григорианского календарей имеет именно такой вид и соответствует представлениям

$$\bar{\alpha}_{\text{ю}} = 365\tfrac{1}{4} = 365 + \tfrac{1}{4}, \quad \bar{\alpha}_{\text{г}} = 365\tfrac{97}{400} = 365 + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{400}.$$

Для юлианского календаря количество τ равно

$$\tau_{\text{ю}} = \frac{940}{76} = \frac{235}{19} = 12 + \frac{7}{19}.$$

Можно сопоставить его с выражением (5) для количества лунных месяцев в n лунных годах.

Функцию $g(n)$ можно выбирать подобно $f(n)$. Однако ее период, как правило, велик (для юлианского календаря он равен 940), поэтому, следуя выбору, описанному в § 1, мы примем следующие правила, выполняющиеся для юлианского календаря:

- Первый месяц каждого лунного года состоит из 30 дней. Далее продолжительности месяцев чередуются и состоят из 29, 30, 29 и т.д. дней.
- Если лунный год с номером n соответствует високосному году (это определяется функцией $f(n)$), то ко второму лунному месяцу нужно прибавить один день.
- Нужно учесть поправки, соответствующие «скачкам Луны».

Остановимся на последнем правиле, относящемся к «скачкам Луны». Обозначим $\gamma(n)$ количество «скачков Луны», приходящееся на лунный год с номером n, т. е. количество дней, которые нужно отнять в лунном году с номером n для того, чтобы обеспечить совпадение продолжительностей календарных и лунных годов по прошествии периода. В юлианском календаре имеем $\gamma_{\text{ю}}(n) = \delta_{19}(n+1)$. Заметим, что, вообще говоря, величина $\gamma(n)$ может быть и отрицательной. Можно проверить, что среднее значение функции $\gamma(n)$, т. е. среднее значение «скачка Луны», приходящееся на один лунный год, равно $\gamma = 30\,(\bar{\alpha}/\bar{\beta} - 12) - 11$. Это позволяет, как объяснялось ранее, построить нужную периодическую функцию $\gamma(n)$. Ее значения не должны превышать 1 по абсолютной величине. В случае $\gamma(n) = 1$ лишний день нужно вычитать из месяца с нечетным номером, он содержит 30 дней. Если же $\gamma(n) = -1$, день нужно прибавлять к месяцу с четным номером, ведь он состоит из 29 дней. Месяцы, в которых учитывается «скачок Луны», должны располагаться во второй половине календарного года, чтобы не затрагивать правила пасхалии.

Для юлианского и григорианского календарей эти числа равны

$$\gamma_{\text{ю}} = \frac{210}{19} - 11 = \frac{1}{19} \quad \text{и} \quad \gamma_{\text{г}} = 30\left(\frac{70499183}{5700000} - 12\right) - 11 = \frac{9183}{190000} = \frac{1}{19} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} + \frac{8}{2500}\,.$$

Зная последовательность $\gamma(n)$, можно найти и формулу для вычисления $e(n)$ — возраста луны на 31 января календарного года с номером n

$$e(n) \equiv 8 + 11n + \sum_{k=0}^{n-1} \gamma(k) \pmod{30}, \quad 1 \le e(n) \le 30 \tag{23}$$

Как и для юлианского календаря, мы считали здесь дату начала нулевого лунного года совпадающей с 23 января. Так можно получить выражения (7) и (17) для функций $e(n)$ в обоих календарях — юлианском и григорианском.

Ниже в этом параграфе мы обсудим некоторые примеры, построенные на указанных общих принципах. Чуть подробнее других рассматривается новоюлианский календарь, принятый рядом Православных Церквей. Его использование совместно с александрийской пасхалией сопряжено с рядом трудностей. Лунный цикл, согласованный с системой високосных годов новоюлианского календаря, приводится нами в конце статьи.

Во всех четырех обсуждаемых ниже календарях пасхальное воскресенье вычисляется по тому же каноническому правилу, что и юлианская Пасха: первое воскресенье после первого полнолуния, следующего за или совпадающего с днем весеннего равноденствия. В каждом случае вычисляется своя функция $e(n)$ – возраст Луны на 31 января года с номером n, и своя функция $d(n)$ – день недели, на который выпадает 21 марта года с номером n. Распределение месяцев в этих календарях устроено так, что в каждом из них даты январских и мартовских новолуний совпадают. Поэтому пасхальное полнолуние V вычисляется по формуле $V \equiv 14 - e(n) \pmod{30}$, $21 \le V \le 50$, см. (9), а число d — день недели пасхального полнолуния — по формуле: $d \equiv d(n) + V \pmod 7$, $0 \le d \le 6$. В каждом случае Пасха вычисляется по формуле: $P = V + 7 - d$.

Ограничиваясь этими замечаниями, мы, рассматривая далее каждый из календарей, ничего не будем писать о вычислении Пасхи, а лишь указываем соответствующие функции $e(n)$ и $d(n)$.

3.1. Смешанный календарь. Солнечная составляющая григорианского календаря, или, иначе, исчисление годов, повсеместно используется в обычной жизни. Вместе с тем конструкция его лунной части сложна и приводит к очень большому периоду. Можно ли изменить лунную составляющую григорианского календаря, построив ее по юлианскому принципу, с тем, чтобы уменьшить период? В этом разделе описывается такая реализация. Поскольку мы ничего не меняем в распределении длительностей годов, отклонение в одни сутки достигается здесь, как и в григорианском календаре, по прошествии 3300 лет. Вместе с тем монотонная составляющая отклонения календарных новолуний от астрономических на начало лунного года в описываемом ниже календаре достигает 1 суток по прошествии примерно 8370 лет. Период его равен 6400 лет, т. е. примерно в 12 раз длиннее юлианского периода и примерно в 890 раз короче периода григорианского календаря.

Будем использовать следующие приближения для средних продолжительностей года и лунного месяца

$$\bar{\alpha} = \frac{146097}{400} = 365\frac{97}{400}, \quad \bar{\beta} = \frac{2337552}{79157}.$$

Для них

$$\alpha - \bar{\alpha} = -0{,}000302\ldots, \quad \beta - \bar{\beta} = 0{,}000009\ldots .$$

Отметим, что приближение к длительности года такое же, как и в григорианском календаре, что позволяет использовать ту же функцию $f(n)$, см. (15), т. е. приводит к той же последовательности високосных годов, что и в григорианском календаре. Но в описываемом случае каждые 6400 идущих подряд календарных лет содержат $16 \cdot 146097 = 2337552$ дня, а соответствующие лунные годы состоят из 79157 лунных месяцев.

Для выбранных приближений имеем

$$\tau = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = \frac{79157}{6400} = 12 + \frac{2357}{6400}, \quad \gamma = 30\left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} - 12\right) - 11 = \frac{31}{640} = \frac{1}{20} - \frac{1}{640}. \qquad (24)$$

В пределах лунных годов месяцы распределяются по следующим правилам.

1. *Первое новолуние года, предшествовавшего 1 году после Р. Х., выпало на 23 января. Эта дата есть начало нулевого лунного года.*

Мы выбрали это начало с тем, чтобы обеспечить аналогию в формулах. В действительности, есть некоторый интервал возможных значений.

2. *Лунный год с номером n состоит из*

$$12 + \left[\frac{2357(n+1)}{6400}\right] - \left[\frac{2357n}{6400}\right]$$

лунных месяцев. Первый месяц каждого лунного года состоит из 30 дней. Далее продолжительности месяцев чередуются, они состоят из 29, 30, 29 и т. д. дней.

Кроме того, нужно сделать две поправки.

3. *Если n есть номер високосного года по григорианскому календарю, то ко второму месяцу n-го лунного года нужно прибавить один день.*

4. *Если номер лунного года, увеличенный на единицу, делится на 20, но не делится на 640, то из одиннадцатого месяца этого лунного года нужно отнять один день.*

Формула в правиле 2 построена в соответствии с первым равенством (24), сравните с (5). Определенные таким способом лунные годы состоят из 12 или 13 месяцев. Эта последовательность, как легко видеть, имеет период 6400. На периоде имеется 2357 лунных лет продолжительностью в 13 месяцев и 4043 года по 12 месяцев. Нетрудно проверить, что номера лунных годов продолжительностью в 13 месяцев на отрезке $0 \le n < 6400$ определяются равенством

$$n = \left[\frac{6400k-1}{2357}\right], \ 1 \le k \le 2357.$$

Правило 4 задает «скачок Луны» аналогично юлианскому календарю и построено в соответствии со вторым равенством (24). Одиннадцатый месяц здесь выбран потому, что он состоит из 30 дней и не затрагивает пасхалию.

Ясно, что эти правила однозначно определяют последовательности новолуний и лунных годов. Каждый лунный месяц состоит из 29 или 30 дней. Каждые 6400 подряд идущих лунных лет содержат по 79157 лунных месяцев и по 2337552 дней, т. е. столько же дней, как и любые 6400 подряд идущих календарных лет. Все соответствующие новолуния календарных годов с номерами n и $n + 6400$ приходятся на одни и те же календарные даты.

Нетрудно проверить, например, с помощью компьютера, что начала лунных годов меняются от 24 декабря до 23 января. При этом возраст луны на 31 января n-го года, который мы, как и ранее, обозначаем $e(n)$, в рассматриваемом календаре вычисляется по формуле

$$e(n) \equiv 8 + 11n + \left[\frac{n}{20}\right] - \left[\frac{n}{640}\right] \pmod{30}, \quad 1 \le e(n) \le 30. \tag{25}$$

Наименьший период этой функции равен 6400. Монотонная часть отклонения начал лунных годов в календаре от соответствующих астрономических новолуний достигнет величины в 1 сутки примерно за 8000 лет.

День недели, приходящийся на 21 марта года с номером n, определяется с помощью формулы, полученной при описании григорианского календаря, см. (19). День Пасхи в любом году приходится на период времени от 22 марта до 26 апреля.

Заметим, что количество дней в календаре на 6400-летнем периоде делится на 7, а именно $2337552 = 7 \cdot 333936$. Поэтому по прошествии 6400 лет дни пасхальных воскресений будут повторяться.

3.2. Новоюлианский календарь. В 1923 г. в Константинополе состоялось совещание Православных Церквей, постановившее изменить юлианский календарь в соответствии с предложением сербского астронома Милутина Миланковича[36]. Новый календарь, получивший название «новоюлианский», был принят Церквами Греции, Югославии, Румынии и Болгарии. Постановление о введении его в Российской Православной Церкви было принято в сентябре 1923 года, но из-за возникшего сопротивления было вскоре отменено[37].

В новом календаре, как и ранее, встречаются обычные годы по 365 дней и високосные по 366 дней. Високосными считаются годы, номера которых делятся на *4*, за исключением годов столетий, у которых число столетий при делении на 9 дает в остатке 0, 1, 3, 4, 5, 7. Другими словами, в календаре М. Миланковича годы столетий считаются високосными лишь в случае, если число столетий при

[36] *Milankovitch M.* Das Ende des julianischen Kalenders und der neue Kalender der orientalischen Kirchen // Astronomische Nachrichten. Vol. 220. 1924. S. 380–384.

[37] Календарный вопрос… С. 147, 156.

делении на 9 дает в остатке 2 или 6. Была ликвидирована также разница в числах между юлианским и григорианским календарями. Продолжительность года в новоюлианском календаре равна

$$f(n) = 365 + \delta_4(n) - \delta_{100}(n) + \delta_{900}(n + 300) + \delta_{900}(n + 700).$$

Период этой последовательности равен 900 лет. Легко вывести, что любые следующие подряд 900 лет календаря Миланковича содержат 328718 дней, а средняя продолжительность года равна $\frac{328718}{900} = \frac{164359}{450} = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{2}{900} = 365{,}242222\ldots$ дней. Получившееся рациональное число хорошо приближает длительность астрономического года: $\alpha - \frac{164359}{450} = -\,0{,}00002\ldots$. Монотонная составляющая отклонения календарных годов от астрономических равна $0{,}00002\ldots \cdot n$ и достигает величины в одни сутки по прошествии примерно 40000 лет.

Пасхальное полнолуние в новоюлианском календаре должно определяться с помощью астрономических вычислений[38]. Однако в большинстве случаев Церкви, перешедшие на новоюлианский стиль, по-прежнему используют юлианскую пасхалию для определения подвижных праздников[39]. Если этот порядок сохранится и далее, Пасха, вычисляемая по александрийской пасхалии, следуя за юлианским календарем, будет смещаться к лету, а затем и к осени, ведь весеннее равноденствие, вычисляемое по новоюлианскому календарю, будет практически стоять на нынешнем месте. Примерно через 25000 лет новоюлианская Пасха будет праздноваться в октябре месяце по новоюлианскому календарю. Юлианский календарь, смещаясь относительно новоюлианского, уводит свое весеннее равноденствие за собой и не нарушает каноническое правило, сколь бы долго это смещение ни происходило, но совместное использование новоюлианского календаря и александрийской пасхалии, конечно, приведет к нарушению норм. Скажем в 3237 г. новоюлианская Пасха произойдет 27 апреля по новоюлианскому стилю, а последний раз Пасха попадет в интервал от 22 марта по 25 апреля в 7425 г.

Последовательность длин годов в календаре М. Миланковича имеет период 900 лет. Количество дней, составляющих эти годы (328718), не делится на 7. Значит, последовательность длин годов и дней недели на начало года имеет период $7 \cdot 900 = 6300$ лет. Каким бы ни было распределение лунных месяцев, период новоюлианского календаря не может быть меньше 6300 лет. Например, если использовать для распределения новолуний принятый в юлианской пасхалии 19-летний метонов цикл, а именно это делается в настоящее время Церквами, перешедшими на новоюлианский стиль, период календаря будет равен $19 \cdot 6300 = 119700$ лет.

Проект новоюлианской пасхалии

Построим теперь, пользуясь принципами юлианского календаря, распределение лунных месяцев и годов для новоюлианского календаря, имея целью уменьшить его период и отклонения первых календарных новолуний от астрономических. Определим новолуния следующими правилами.

38 *Milankovitch.* Das Ende des julianischen Kalenders.

39 Календарный вопрос… С. 156–157.

1. *Первое новолуние года, предшествовавшего первому году после Р. Х., выпало на 23 января. Эта дата есть начало нулевого лунного года.*

Как и ранее, мы выбрали это начало с тем, чтобы обеспечить аналогию в формулах. Можно было бы выбрать и другую дату в пределах некоторого интервала возможных значений.

2. *Первое новолуние, выпадающее на 25 декабря или после этой даты, считается началом нового лунного года. Первый месяц каждого лунного года состоит из 30 дней. Далее продолжительности месяцев чередуются и составляют 29, 30, 29 и т. д. дней.*

Кроме того, нужно сделать две поправки.

3. *Если лунный год соответствует високосному году в календаре Миланковича, то ко второму месяцу нужно прибавить один день.*

4. *Если номер лунного года, увеличенный на 1, делится на 21, то из одиннадцатого месяца лунного года нужно отнять один день.*

Эти правила определяют бесконечную последовательность лунных месяцев продолжительностью в 29 и 30 дней. Отметим некоторые их отличия от правил юлианского календаря (см. § 1).

а) Правило 2 не указывает распределение длин лунных годов. Это отличие несущественно, ведь и правило в описании юлианского календаря может быть изменено подобным образом (см. замечание к правилу 2 в § 1). Формула, задающая предлагаемую последовательность длин лунных годов, указана ниже, см. (27).

б) В правиле 4 «скачок Луны» происходит не каждый девятнадцатый, но каждый двадцать первый год, благодаря чему обеспечивается лучшее согласование лунных месяцев с календарными годами Миланковича и уменьшается период календаря.

в) По правилу 4 день вычитается не из последнего месяца, а из одиннадцатого. Это связано с тем, что в юлианском календаре последний месяц лунного года с золотым числом 19 всегда имеет 30 дней. В описываемом календаре уменьшаемый лунный год иногда может состоять из 12 месяцев, и вычитание из последнего месяца привело бы к нежелательному появлению месяцев длиной в 28 дней.

Сделаем несколько замечаний, относящихся к математической стороне предлагаемой конструкции. В основе ее лежат следующие рациональные приближения к длительностям тропического года и синодического месяца

$$\bar{\alpha} = \frac{1150513}{3150} = \frac{164359}{450} = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{2}{900}, \quad \bar{\beta} = \frac{1150513}{38960}.$$

Для них имеем

$$\tau = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = \frac{38960}{3150} = 12 + \frac{116}{315}, \quad \gamma = 30\left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} - 12\right) - 11 = \frac{1}{21}. \tag{26}$$

В соответствии с этими равенствами лунный год с номером n состоит из

$$12 + \left[\frac{116(n+1)}{315}\right] - \left[\frac{116n}{315}\right] \tag{27}$$

лунных месяцев, а возраст луны на 31 января n-го года, который мы, как и ранее, обозначаем $e(n)$, в рассматриваемом календаре вычисляется по формуле[40]

[40] Сравните эти формулы с (4), (7) и (23).

$$e\,(n) \equiv 8 + 11n + \left[\tfrac{n}{21}\right] \pmod{30}, \quad 1 \le e\,(n) \le 30. \tag{28}$$

Последнюю формулу можно переписать в виде, подобном (8):

$$e\,(n) \equiv e\,(n-1) + 11 + \delta_{21}(n) \pmod{30}, \quad 1 \le e\,(n) \le 30.$$

Функция $e\,(n)$ имеет период $315 = 15 \cdot 21 = 5 \cdot 7 \cdot 9$, так что через каждые 315 лет первые январские новолуния, а значит, и начала лунных годов будут приходиться на одинаковые даты. Таким образом, таблица, аналогичная таблице 1 из § 1, будет содержать 315 строк, и «скачок Луны» будет происходить в ней каждые 21 год, т. е. 15 раз. Метонов цикл заменяется здесь циклом из 315 лет, состоящих из 3896 месяцев.

Эта таблица приводится в конце статьи (см. таблицу 4). В ее первом столбце, озаглавленном буквой «О», стоят остатки от деления номеров годов от Р. Х. на 315. В продолжение строки заголовков стоят числа дней до новолуния, указанного в следующем столбце. Второй столбец таблицы содержит начала лунных годов. Они выпадают на промежуток от 25 декабря до 23 января. В заголовке третьего столбца стоят числа 29/30, означающие, что для получения следующего новолуния нужно, согласно правилу 3, прибавлять 30 или 29 в соответствии с тем, будет этот год високосным или нет. Точно так же в заголовке столбца, соответствующего одиннадцатому лунному месяцу, записано 29/30. В соответствии с правилом 4 в году, номер которого делится на 21, к дате новолуния, стоящей в этом столбце, нужно будет прибавлять 29, а в остальных лунных годах по 30 дней. Эти годы отмечены в таблице знаком «*».

Как отмечалось в § 1, примерно третья часть дней юлианского календаря никогда не являются днями новолуний. В частности, на февральский день, вставляемый в високосные годы юлианского календаря после 24 февраля, новолуния никогда не выпадают. В описываемом нами календаре ситуация иная. Каждый его день, как и в реальности, когда-нибудь является днем новолуния, а значит, в високосные годы новолуния могут выпадать и на вставляемый день, не имеющий даты. Мы принимаем, что в високосном году нашего календаря лишний (не имеющий даты) день вставляется между 22 и 23 февраля. Такая вставка никак не заденет новолуния всех лунных годов, начинающихся в январе, а также лунных годов, начинающихся после 25 декабря. Объяснение этому такое же, как и в случае юлианского календаря. Лишь в високосные годы, начинающиеся с 25 декабря, новолуния в феврале будут выпадать на вставляемый день, не имеющий даты и потому отсутствующий в таблице 4. В таблице мы отметили это обстоятельство знаком •, расположенным в некоторых клетках, соответствующих дате 22 февраля. В лунный год, начинающийся с 25 декабря, февральское новолуние выпадает на 22 февраля, если этот год не является високосным, как 2023, если же этот год високосный, как 2080, новолуние выпадет на вставляемый день, не имеющий даты. Из таблицы видно, что остатки годов при делении на 315, в которые новолуние может выпасть на вставляемый день, равны $19k$, $1 \le k \le 10$. На периоде в 6300 лет это случается 48 раз. Заметим, впрочем, что эта сложность связана с принятым способом наименования дней календарных лет.

В указанной таблице среди 315 строк имеется всего лишь 45 различных, если не учитывать новолуния, выпадающие на вставляемый в високосные годы лишний день. Как и при описании григорианского календаря, мы будем обозначать словом «эпакта» распределение новолуний в пределах лунного года, т. е. строку в таблице 4. Все 45 различных эпакт мы обозначим следующим образом:

$$1, 2, 3, \ldots, 29, 30, 2^*, 4^*, 6^*, \ldots, 28^*, 30^*.$$

В таблице 4 каждая из эпакт 1, 2, …, 30 встречается по 10 раз, а эпакты $2^*, 4^*, \ldots, 30^*$ только по одному разу.

Для того чтобы вычислить распределение новолуний в каком-либо году, нужно прежде всего вычислить значение функции $e\,(n)$ — возраст луны на 31 января этого года, см. (28). Величина $31 - e\,(n)$ есть дата первого январского новолуния. Все остальные новолуния можно вычислить, отталкиваясь от январского с помощью правил 1–4, определяющих распределение новолуний. Эту информацию можно свести в одну таблицу, см. таблицу 5. В конструкции ее можно усмотреть некоторую закономерность. Начиная из верхнего левого угла и двигаясь сверху вниз и слева направо в пределах календарных дат, в таблице последовательно 12 раз расположены отрезки целых чисел от 30 до 1. Продолжается эта последовательность началом и концом тринадцатого такого же отрезка. В отдельных клетках получившейся таблицы расположены по два числа 8 и 7. Кроме того, в некоторые клетки двух последних столбцов добавлены знаки вида $2k^*$. Пользуясь этой таблицей, легко найти распределение новолуний в каждом году с номером n.

1. Если $e\,(n)$ четно и при этом $n + 1$ делится на 21, то году с номером n соответствует эпакта $e\,(n)^*$.

2. Если условие пункта 1 нарушается, то году с номером n соответствует эпакта $e\,(n)$.

Если эпакта года с номером n равна $e\,(n)$, то числа $e\,(n)$ расположены в клетках таблицы 5, отвечающих датам новолуний этого года. Если же эпакта года равна $e\,(n)^*$, то даты новолуний этого года соответствуют клеткам, в которых записаны числа $e\,(n)^*$, а также числа $e\,(n)$, лежащие в столбцах, расположенных левее столбцов, содержащих $e\,(n)^*$. Так $e\,(2008) = 21$, поэтому новолуния 2008 г. приходятся на даты, соответствующие клеткам, где в таблице 5 записаны числа 21, т. е.

10.01, 9.02, 10.03, 9.04, 8.05, 7.06, 6.07, 5.08, 3.09, 3.10, 1.11, 1.12.

Остаток от деления 2008 на 315 равен 118. Под этим номером в таблице 4 расположена в точности такая же строка.

Рассмотрим еще один пример: $n = 2036$. Так как $2037 = 21 \cdot 97$ делится на 21 и $e\,(2036) = 30$ четно, эпакта этого года равна 30^*. В соответствии с таблицей 5 находим даты календарных новолуний 2036 года:

1.01, 31.01, 1.03, 31.03, 29.04, 29.05, 27.06, 27.07, 25.08, 24.09, 23.10, 21.11, 20.12.

Остаток от деления 2036 на 315 равен 146. Сравнивая строку с этим номером из таблицы 4 и выписанную выше последовательность дат, видим, что они совпадают.

Вообще вся информация таблицы 4 содержится в сжатом виде в таблице 5. Отметим еще некоторые свойства. Годы с эпактами $2k$ и $2k^*$ состоят из одинакового количества лунных месяцев. Лунные годы с эпактами 1, 2, …, 7 начинаются в декабре, остальные 23 эпакты соответствуют годам, начинающимся с 1 по 23 января. Годы с эпактами от 1 до 7 и от 27 до 30 (их эпакты записаны в нижней части самого правого столбца таблицы 5, отвечающей неполному тринадцатому отрезку чисел от 30 до 1) все состоят из 13 лунных месяцев. Остальные лунные годы содержат по 12 месяцев. Кроме того, из таблицы 5 следует, что каждый из дней года в период с января по октябрь, отличных от 22.02, 22.04, 20.06, 18.08 и 16.10, принадлежит только одной эпакте. Различные эпакты практически не пересекаются. Это не совсем верно по отношению к эпактам 7 и 8, 8*, отвечающим крайним датам начал лунных годов 25.12 и 23.01. Они имеют пересечения по 6 датам, как это видно из таблицы 5. Но расстояние между такими годами, как это следует из таблицы 4, не меньше 8 лет. А различные годы с одинаковыми эпактами лежат друг к другу не ближе, чем на 19 лет. Это замечание относится и к годам с эпактами $2k$ и $2k^*$.

Знаком • в таблице 5 обозначено, что в високосные годы с эпактой 7 новолуние приходится не на 22 февраля, а на день, вставляемый в феврале между 22.02 и 23.02 и не имеющий даты.

Учитывая, что наименьшее общее кратное чисел 900, 315 и 7 равно 6300, т. е. $6300 = 7 \cdot 900 = 20 \cdot 315$, заключаем, что по прошествии 6300 лет начала календарных и лунных годов, а также дни недели начнут повторяться. Все соответствующие новолуния календарных годов с номерами n и $n + 6300$ приходятся на одни и те же календарные даты. Таким образом, рассматриваемый календарь имеет период 6300 лет вместо 532-летнего периода юлианского календаря.

В силу равенства $\beta - 1150513/38960 = -0{,}000033\ldots$ монотонная часть отклонения начал лунных годов от соответствующих астрономических новолуний по абсолютной величине меньше, чем $0{,}00042n$ и достигает величины в 1 сутки примерно за 2400 лет. Отклонение периодической части на периоде в 6300 лет не превосходит 2 суток.

Принятое в новоюлианском календаре распределение високосных годов ведет к формуле для дня недели 21 марта

$$d(n) \equiv 2 + n + \left[\tfrac{n}{4}\right] - \left[\tfrac{n}{100}\right] + \left[\tfrac{n+300}{900}\right] + \left[\tfrac{n+700}{900}\right] \pmod 7, \quad 0 \le d(n) \le 6.$$

и пасхальное воскресенье вычисляется обычным способом.

Чтобы вычислить день Пасхи в календарном году с номером n нужно с помощью условий

$$V \equiv 6 + 19n - \left[\tfrac{n}{21}\right] \pmod{30}, \quad 21 \le V \le 50$$

определить мартовскую дату пасхального полнолуния V, затем вычислить день недели d пасхального полнолуния

$$d \equiv 2 + n + \left[\tfrac{n}{4}\right] - \left[\tfrac{n}{100}\right] + \left[\tfrac{n+300}{900}\right] + \left[\tfrac{n+700}{900}\right] + V \pmod 7, \quad 0 \le d \le 6.$$

Пасха придется на мартовский день с номером

$$P = V + 7 - d.$$

При этом нужно иметь в виду правило пересчета мартовских чисел в апрельские, если $P > 31$.

В XXI в. даты празднования Пасхи по описываемому календарю 21 раз отличаются от дат, рассчитанных по григорианскому календарю. Так в 2008 г. григорианская Пасха пришлась на 23 марта, а рассчитанная по описываемому календарю — на 30 марта по григорианскому стилю. В ближайшее время даты празднования будут отличаться в 2012, 2015, 2018, 2019 гг.

По прошествии 6300 лет даты пасхального полнолуния и Пасхи начнут повторяться. Пасха, вычисленная по формулам этого календаря, приходится на период с 22 марта по 26 апреля.

3.3. Календарь с периодом в 372 года. В 1895 г. американский астроном Дж. Стоквелл в статье, посвященной затмениям[41], опубликовал обнаруженное им соотношение: 372 тропических года очень близки к 4601 лунному месяцу. С учетом принятых нами продолжительностей эти соотношения могут быть записаны в виде

$$372 \cdot \alpha - 135870 = 0{,}09\ldots, \quad 4601 \cdot \beta - 135870 = 0{,}23\ldots. \tag{29}$$

Насколько мы знаем, эти совместные приближения никогда не использовались для построения календаря. Поэтому ниже мы предлагаем такую конструкцию. Календарь, основанный на приближениях (29), обладает рядом достоинств. Монотонная составляющая отклонения годов достигает величины в 1 сутки по прошествии примерно 3750 лет, аналогичная величина для месяцев составляет отрезок в 1500 лет. Вместе с тем период этого календаря равен 372 года, что короче, чем 532-летний период юлианского календаря. Через каждые 372 года в предлагаемом календаре одновременно повторяются дни выпадения новолуний, дни недели и високосные годы, т. е. Пасха, рассчитанная на основе этого календаря, будет повторяться каждые 372 года.

В рассматриваемом случае $\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ — рациональные приближения к числам α и β — имеют вид

$$\bar{\alpha} = \frac{135870}{372} = \frac{22645}{62}, \quad \bar{\beta} = \frac{135870}{4601}.$$

В соответствии с представлением

$$\frac{22645}{62} = 365\frac{15}{62} = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{124}$$

високосными считаются годы, номер которых делится на 4, но не делится на 124.

Таким образом, календарные годы имеют продолжительность в 365 и 366 дней. Период этой последовательности равен 124 года. Любые $372 = 3 \cdot 124$ подряд идущих календарных года состоят из 135870 дней. Вследствие равенства $135870 = 7 \cdot 19410$ заключаем, что 372 календарных года содержат в точности 19410 недель, так что по прошествии 372 календарных лет числа с одинаковыми календарными датами придутся на одинаковые дни недели.

[41] *Stockwell J. N.* On the Law of Recurrence of Eclipses on the Same Day of the Tropical Year // The Astronomical Journal. Vol. 15. Iss. 346. 1895. P. 73–75.

Монотонная составляющая отклонения календарных годов от астрономических равна $(\alpha - \bar{\alpha})\, n = 0{,}00026\ldots \cdot n$ и достигает величины в одни сутки по прошествии примерно 3800 лет. Заметим, что при этом календарный день весеннего равноденствия с течением годов отстает от астрономического, т. е. движется в сторону, противоположную движению юлианского календаря.

В рассматриваемом случае

$$\tau = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = \frac{4601}{372} = 12 + \frac{137}{372}, \;\; \gamma = 30\,(\tau - 12) - 11 = \frac{3}{62}.$$

Поэтому календарные новолуния расположим в соответствии со следующими правилами.

1. *Первое новолуние года, предшествовавшего первому году после Р. Х., выпало на 23 января. Эта дата есть начало нулевого лунного года.*

2. *Лунный год с номером n состоит из*

$$12 + \left[\frac{137(n+1)}{372}\right] - \left[\frac{137n}{372}\right]$$

лунных месяцев. Первый месяц каждого лунного года состоит из 30 дней. Далее продолжительности месяцев чередуются и состоят из 29, 30, 29 и т. д. дней.

Кроме того, нужно сделать две поправки.

3. *Если номер лунного года делится на 4, но не делится на 124, т. е. соответствующий календарный год високосный, то ко второму месяцу нужно прибавить один день.*

4. *Если номер лунного года при делении на 62 имеет в остатке одно из чисел 15, 46 или 61, то из одиннадцатого месяца этого лунного года нужно отнять один день.*

Ясно, что эти правила однозначно определяют последовательности новолуний и лунных годов. Каждый лунный месяц состоит из 29 или 30 дней. Каждые 372 подряд идущих лунных года содержат 135870 дней, т. е. столько же, как и любые 372 подряд идущих календарных года. Все соответствующие новолуния календарных годов с номерами n и $n + 372$ приходятся на одни и те же календарные даты.

Каждые 372 подряд идущих лунных года содержат по 4601 лунных месяцев, и последовательность их длин имеет период 4601. Начала лунных годов меняются от 24 декабря до 24 января. Как и в случае новоюлианского календаря, начало правила 2, определяющее длительности лунных годов, можно было бы записать в такой редакции: *Первое новолуние, выпадающее на 24 декабря или после этой даты, считается началом нового лунного года*, исключив из правила 2 формулу для $h\,(n)$.

Возраст луны на 31 января n-го года, который мы будем, как и ранее, обозначать $e\,(n)$, в рассматриваемом календаре вычисляется по формуле

$$e\,(n) \equiv 8 + 11n + \left[\frac{n}{62}\right] + \left[\frac{n+15}{62}\right] + \left[\frac{n+46}{62}\right] \pmod{30}, \quad 1 \le e\,(n) \le 30. \qquad (30)$$

Наименьший период этой функции равен 372.

Монотонная часть отклонения первых календарных новолуний от астрономических достигает величины в 1 сутки по прошествии примерно 1500 лет.

День недели, приходящийся на 21 марта года с номером n, определяется по формуле

$$d(n) \equiv n + \left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n}{124}\right] \pmod 7, \quad 0 \le d(n) \le 6.$$

Как нетрудно проверить, значение P в этом календаре не может равняться 57, и, значит, день Пасхи в любом году приходится на обычный период времени от 22 марта до 25 апреля.

3.4. Календарь Медлера. Юлианский календарь по прошествии каждых 128 календарных лет опережает 128 астрономических лет на одни сутки. В 1864 г. И. Медлер[42] предложил вычитать этот лишний день каждые 128 лет, начиная с 1900 г. Легко сосчитать, что в календаре Медлера каждые идущие подряд 128 лет содержат 46751 день. Средняя продолжительность года равна $\frac{46751}{128} = 365\frac{31}{128} = 365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{128} = 365{,}24218\ldots$ дней. Это число очень хорошо приближает продолжительность тропического года: $\alpha - 365\frac{31}{128} = 0{,}00001\ldots$.

Монотонная составляющая отклонения начал календарных годов от астрономических не превосходит $0{,}00001 \cdot n$ и достигает величины в одни сутки по прошествии примерно 80000 лет.

В 1900 г. комиссия Русского астрономического общества по вопросу о реформе календаря рекомендовала введение в России календаря на основе поправки Медлера, но проект не был принят.

Дробь $365\frac{31}{128}$ очень хорошо приближает продолжительность тропического года α, поэтому надеяться на то, что хорошее приближение к β позволит построить простой календарь, трудно[43]. Ниже будет описана такая конструкция, в которой январские новолуния и одновременно дни недели повторяются лишь спустя 32256 лет.

Достроим лунную составляющую календаря Медлера, используя приближения

$$\bar{\alpha} = \frac{46751}{128} = \frac{1683036}{4608}, \quad \bar{\beta} = \frac{1683036}{56993}.$$

Для них

$$\tau = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} = 12 + \frac{1697}{4608}, \quad \gamma = 30\left(\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}} - 12\right) - 11 = \frac{37}{768} = \frac{1}{21} + \frac{1}{1792}.$$

Распределим календарные лунные месяцы, руководствуясь найденными дробями и следующими правилами.

1. *Первое новолуние года, предшествовавшего первому году после Р. Х., выпало на 23 января. Эта дата есть начало нулевого лунного года.*

2. *Лунный год с номером n состоит из*

$$12 + \left[\frac{1697(n+1)}{4608}\right] - \left[\frac{1697n}{4608}\right]$$

лунных месяцев. Первый месяц каждого лунного года состоит из 30 дней. Далее продолжительности месяцев чередуются и состоят из 29, 30, 29 и т. д. дней.

---

[42] *Медлер И.* О реформе календаря // Журнал министерства народного просвещения. 1864. Январь. Ч. CXXI. Отд. 6. С. 9–21.

[43] Выше мы уже писали, что между продолжительностями тропического года α и синодического месяца β не существует соотношений со сравнительно небольшими целыми коэффициентами. Хорошие совместные рациональные приближения к этим числам должны иметь большие числители и знаменатели.

Кроме того, нужно сделать три поправки.

3. *Если лунный год соответствует високосному году в календаре Медлера, то ко второму его месяцу нужно прибавить один день.*

4. *Если номер лунного года, увеличенный на единицу, делится на 21, то от одиннадцатого месяца этого лунного года нужно отнять один день.*

5. *Если номер лунного года, увеличенный на единицу, делится на 1792, то от девятого месяца этого лунного года нужно отнять один день.*

Можно проверить, что начала лунных годов при таком их распределении меняются от 25 декабря до 24 января.

В этом случае нам не удалось построить календарь, в котором функция $\gamma(n)$ принимает только значения 0, ± 1. Если номер года n, увеличенный на единицу, делится на 21 и на 1792, т. е. делится на 5376, то выполняется равенство $\gamma(n) = 2$, и значит, в соответствующем лунном году лунные месяцы с номерами 8, 9, 10, 11, 12 содержат по 29 дней.

Как и ранее, для возраста луны на 31 января имеем выражение

$$e(n) \equiv 8 + 11n + \left[\frac{n}{21}\right] + \left[\frac{n}{1792}\right] \pmod{30}, \quad 1 \le e(n) \le 30.$$

Наименьший период этой функции равен 32256.

Можно проверить, что монотонная часть отклонения начал лунных годов от соответствующих астрономических новолуний достигает величины в одни сутки примерно за 5400 лет. День недели 21 марта определяется по формуле

$$d(n) \equiv 2 + n + \left[\frac{n}{4}\right] - \left[\frac{n+20}{128}\right] \pmod{7}, \quad 0 \le d(n) \le 6.$$

Каждый из дней промежутка времени от 22 марта до 26 апреля может быть днем Пасхи, вычисленной по этому календарю.

Заметим, что количество дней в календаре на 32256-летнем периоде делится на 7, а именно — $11781252 = 7 \cdot 1683036$. Поэтому по прошествии 32256 лет дни пасхальных воскресений будут повторяться.

Во втором столбце следующей далее таблицы указаны годы, по прошествии которых календарный год отклоняется от истинного на 1 сутки. Третий столбец содержит годы, по прошествии которых отклонение начала лунного года от соответствующего новолуния достигает величины в 1 сутки. Четвертый столбец указывает период календаря в годах, т. е. количество лет, по истечении которых соответствующие новолуния и дни недели приходятся на одинаковые даты, т.е. календарь начинает повторяться. В последнем столбце указаны интервалы, на которые приходится день Пасхи, вычисленный по соответствующим формулам.

Таблица 3

Название	**Календарные годы**	**Лунные годы**	**Длина периода**	**Интервал для Пасхи**
Юлианский	128	308	532	22 марта – 25 апреля
Григорианский	3300	40000	5700000	22 марта – 25 апреля
Смешанный	3300	8000	6400	22 марта – 26 апреля
372	3750	1500	372	22 марта – 25 апреля
Миланковича	40000	2400	6300	22 марта – 26 апреля
Медлера	80000	5400	32256	22 марта – 26 апреля

3.5. Иудейский календарь. В связи с пасхалистическими вычислениями традиционно юлианский календарь соотносится с иудейским. Здесь мы лишь затронем эту тему.

Создание иудейского вычисляемого календаря, взявшего из астрономии лишь среднюю продолжительность синодического месяца, имеет по существу те же причины, что и создание календаря юлианского, хотя и связано с иными обстоятельствами. После того, как армия Тита разгромила в 70 г. Иерусалим и большинство жителей Иудеи были рассеяны по Римской империи, возникла проблема сохранения системы иудейских религиозных праздников и одновременного исполнения религиозных обрядов в удаленных римских провинциях. Для сохранения единства нации иудейский раввин Хиллель II в 358/359 гг. по Р. Х. ввел новый календарь, не использующий астрономические наблюдения. Этот календарь после уточнений и сейчас является официальным календарем государства Израиль.

Иудейский календарь, в отличие от юлианского и григорианского календарей, включает в себя только лунные годы и лунные месяцы. Понятие «календарный год» в нем отсутствует. В основе этого календаря лежит приближение

$$\beta - \tfrac{765433}{25920} = -0{,}000006\ldots$$

к длительности синодического лунного месяца. Это приближение имеет, по-видимому, вавилонское происхождение и было известно Гиппарху и К. Птолемею[44].

Последовательность лунных месяцев разбивается на отрезки длиной в 12 или 13 месяцев (лунные годы) по правилу

$$12, 12, 13, 12, 12, 13, 12, 13, 12, 12, 13, 12, 12, 13, 12, 12, 13, 12, 13, \ldots .$$

Далее эта последовательность начинает повторяться. Ее период длиной в 19 лет содержит 7 лет по 13 месяцев и 12 лет по 12 месяцев (метонов цикл: 235 месяцев распределяются по 19 лунным годам). Не трудно проверить, что первые n лунных лет иудейского календаря состоят из

$$12n + \left[\tfrac{7n+1}{19}\right]$$

месяцев. Начало M лунного года с номером $n+1$, $n \geq 0$, вычисляется по правилу:

$$M = 1 + \left[\frac{1}{4} + \frac{467}{2160} + \left(12n + \left[\frac{7n+1}{19}\right]\right) \cdot \frac{765433}{25920}\right].$$

Затем оно может быть сдвинуто на 1 или 2 дня вперед с тем, чтобы по религиозным соображениям начало нового лунного года не выпало на среду, пятницу или воскресенье, а с другой стороны — чтобы длина каждого лунного года равнялась одному из чисел 353, 354, 355 (год в 12 месяцев) или 383, 384, 385 (год в 13 месяцев).

[44] *Птолемей К.* Альмагест, или математическое сочинение в тринадцати книгах / Пер. с древнегреч. И. Н. Веселовского. М., 1998. С. 105, 108. Клавдий Птолемей (ок. 87 — 165) — древнегреческий астроном; его книга «Альмагест» сыграла в развитии астрономии такую же роль, как и «Начала» Евклида — для математики.

Лунные месяцы состоят из 29 или 30 дней, их продолжительности выбираются так, чтобы обеспечить нужную длину лунного года. Отклонение начал лунных годов от соответствующих астрономических может достигать 25 дней. Иудейский календарь не предназначен для точного следования солнечным годам.

Впоследствии прямое вычисление январского новолуния очередного лунного года появилось в григорианском календаре.

Существующие формулы позволяют легко вычислять и сравнивать даты православной Пасхи и Пасхи иудейской (15 Нисана). Были случаи, когда православная Пасха праздновалась до иудейской: в 475 г. праздники выпали на 6 и 8 апреля, а в 495 г. — на 26 и 28 марта. Иногда даты этих двух праздников совпадали: в 743 г. они праздновались 14 апреля, а в 783 г. — 23 марта. Впоследствии православная Пасха всегда праздновалась после иудейской. Связано это с тем, что для средних продолжительностей лет юлианского и иудейского календарей выполняется неравенство $365\frac{1}{4} - \frac{235}{19} \cdot \frac{765433}{25920} = \frac{313}{98496} > 0$, а потому юлианская дата 15 Нисана сдвигается все ближе к зиме юлианского календаря и тем самым удаляется от 21 марта — даты весеннего равноденствия по юлианскому календарю.

Учитывая, что $365 + \frac{1}{4} - \frac{1}{100} + \frac{1}{400} - \frac{235}{19} \cdot \frac{765433}{25920} = -\frac{10643}{2462400}$ — отрицательное число, заключаем, что при всех достаточно больших n григорианская Пасха будет предшествовать иудейской. В последний раз григорианская Пасха будет следовать за иудейской в 7466 году. В этот год иудейская Пасха выпадет на 24 февраля, а григорианская Пасха на 27 февраля по юлианскому календарю (22 апреля по григорианскому календарю). В 7485 г. эти два праздника совпадут в последний раз. Это произойдет 24 февраля по юлианскому календарю (19 апреля по григорианскому календарю). Начиная с 7486 г. григорианская Пасха будет всегда выпадать ранее иудейской. Каждый из четырех календарей, описанных в § 3, основан на более точных приближениях к длине астрономического года, чем $\frac{235}{19} \cdot \frac{765433}{25920}$, поэтому все они по отношению к иудейскому календарю ведут себя так же, как и григорианский календарь.

4. Заключение

Уменьшение отклонений солнечного и лунного связано с выбором более точных рациональных приближений к средним продолжительностям тропического года и синодического месяца, определяемых астрономической наукой. Как правило, уточнение приближений приводит к усложнению календаря. Эти рациональные приближения задают среднюю величину календарных годов и календарных лунных месяцев и, следовательно, величину монотонной части отклонения календаря от астрономических реальностей за год. Именно точностью рациональных приближений определяется временной интервал, в течение которого календарь отклоняется от астрономических величин на одни сутки. Далее построение календаря сводится к выбору распределения календарных годов, а также и календарных лунных месяцев. При этом длительности годов можно выбирать, как в юлианском календаре, равными 365 или 366 лет, а длительности месяцев в 29 или 30 дней. Конечно, можно выбирать и другие продолжительности, например, в 28 дней для длительности месяцев, однако при этом следует избегать «экзотических» лунных месяцев, содержащих, например, 1 или 59 дней, как это бывает в григорианском календаре. Какие же условия следует обеспечить таким выбором? К чему следует стремиться? Перечислим важные, с нашей точки зрения, критерии.

- По возможности меньшее отклонение дней весеннего равноденствия от соответствующих астрономических равноденствий, а также меньшее отклонение мартовских календарных новолуний от соответствующих астрономических новолуний.
- Обозримость календаря, т. е. наличие не очень сложных правил (таблиц или формул) для вычисления начал нового календарного года и очередного мартовского новолуния, а также дня недели, на который выпадает весеннее равноденствие. С этим же связана периодичность календаря. Следует стремиться к тому, чтобы период календаря, т. е. временной интервал, через который одновременно начинают повторяться дни недели начал календарных годов, дни недели первых мартовских новолуний, продолжительности календарных годов и лунных месяцев, был бы по возможности минимальным. Дата празднования Пасхи повторяется с этим же периодом.
- Как известно, распределение подвижных церковных праздников в году однозначно определяется календарной датой, на которую выпадает праздник Пасхи. В обоих календарях, юлианском и григорианском, дата празднования Пасхи меняется в интервале от 22 марта до 25 апреля. Увеличение этого интервала на один день приводит к возможному смещению подвижных праздников относительно неподвижных на один день. Так, например, изменение интервала празднования Пасхи до промежутка от 22 марта до 26 апреля может привести к уменьшению Петрова поста, но не более чем на один день.
- Календарные новолуния между двумя последовательными мартовскими новолуниями должны, по возможности, не сильно отклоняться от астрономических новолуний.

Вопрос об изменении юлианского календаря есть вопрос церковной политики, и решать его должно с учетом многих факторов. Юлианский календарь уже сейчас потерял свою роль как связанное с Солнцем и Луной средство измерения времени и является способом распределения православных праздников. Церковное весеннее равноденствие смещается к лету и уводит в этом направлении все праздники. Прецедент известен: Древний Египет жил несколько тысячелетий по 365-дневному солнечному календарю, в котором начало года смещалось на одни сутки по прошествии каждых четырех лет. Пройдя в течение 1461 года через лето, весну, зиму и осень, начало года возвращалось к исходному положению. Точно так же, если не трогать юлианский календарь, все церковные праздники вместе с Пасхой совершат непрерывный переход сквозь времена года и по прошествии примерно 45000 лет вернутся к состоянию на момент I Вселенского Собора. Движение это будет происходить медленно, для каждого поколения практически незаметно, изменения будут происходить один раз в сто лет и не затронут взаимного расположения праздников. Ощутимым будет лишь сдвиг неподвижных праздников (ближайший раз в 2100 г.).

С математической точки зрения, количество альтернатив юлианскому календарю невелико. Ведь они связаны с хорошими рациональными приближениям к средним величинам тропического года и синодического месяца. Слово «хорошими» означает здесь не только достаточную малость отклонений, но и арифметические свойства числителей и знаменателей приближений, поскольку именно от них зависит величина периода календаря и простота формул вычисления пасхалии.

Новоюлианское распределение годов с новой пасхалией, основанной на принципах юлианского календаря, кажутся мне предпочтительнее иных вариантов. Нужно иметь в виду, что до 2800 г. продолжительности новоюлианского и григорианского календарных годов совпадают, и лишь впоследствии проявится то, что длина новоюлианского календарного года чуть короче. Значит, в период до 2800 г. календари будут отличаться только датами празднования Пасхи и других подвижных праздников. Изменение юлианского календаря сведется к изменению правил пасхалии и сдвигу неподвижных праздников на соответствующие даты действующего новоюлианского календаря.

Как бы то ни было, затронутые в статье проблемы требуют дальнейших исследований и обсуждения их результатов астрономами и математиками, историками Церкви и специалистами в других областях.

В заключение я хотел бы выразить глубокую благодарность А. Н. Паршину, прочитавшему первоначальный вариант статьи и сделавшему ряд замечаний, учтенных в окончательном тексте. Его постоянное внимание к статье способствовало публикации.

Таблица 4. Новолуния для новоюлианского календаря (проект)

О	30	29/30	30	29	30	29	30	29	30	29	30/29	29	30
0	23.1	22.2	23.3	22.4	21.5	20.6	19.7	18.8	16.9	6.10	14.11	14.12	–
1	12.1	11.2	12.3	11.4	10.5	9.6	8.7	7.8	5.9	5.10	3.11	3.12	–
2	1.1	31.1	1.3	31.3	29.4	29.5	27.6	27.7	25.8	24.9	23.10	22.11	21.12
3	20.1	19.2	20.3	19.4	18.5	17.6	16.7	15.8	13.9	13.10	11.11	11.12	–
4	9.1	8.2	9.3	8.4	7.5	6.6	5.7	4.8	2.9	2.10	31.10	30.11	–
5	9.12	28.1	26.2	28.3	26.4	26.5	24.6	24.7	22.8	21.9	20.10	19.11	18.12
6	17.1	16.2	17.3	16.4	15.5	14.6	13.7	12.8	10.9	0.10	8.11	8.12	–
7	6.1	5.2	6.3	5.4	4.5	3.6	2.7	1.8	30.8	29.9	28.10	27.11	–
8	6.12	25.1	23.2	25.3	23.4	23.5	21.6	21.7	19.8	18.9	17.10	16.11	15.12
9	14.1	13.2	14.3	13.4	12.5	11.6	10.7	9.8	7.9	7.10	5.11	5.12	–
10	3.1	2.2	3.3	2.4	1.5	31.5	29.6	29.7	27.8	26.9	5.10	24.11	23.12
11	22.1	21.2	22.3	21.4	20.5	19.6	18.7	17.8	15.9	15.10	13.11	13.12	–
12	11.1	10.2	11.3	10.4	9.5	8.6	7.7	6.8	4.9	4.10	2.11	2.12	–
13	31.12	30.1	28.2	30.3	28.4	28.5	26.6	26.7	24.8	23.9	22.10	21.11	20.12
14	19.1	18.2	19.3	18.4	17.5	16.6	15.7	14.8	12.9	12.10	10.11	10.12	–
15	8.1	7.2	8.3	7.4	6.5	5.6	4.7	3.8	1.9	1.10	30.10	29.11	–
16	28.12	27.1	25.2	27.3	25.4	25.5	23.6	23.7	21.8	20.9	19.10	18.11	17.12
17	16.1	15.2	16.3	15.4	14.5	13.6	12.7	11.8	9.9	9.10	7.11	7.12	–
18	5.1	4.2	5.3	4.4	3.5	2.6	1.7	31.7	29.8	28.9	27.10	26.11	–
19	25.12	24.1	22.2, •	24.3	22.4	22.5	20.6	20.7	18.8	17.9	16.10	15.11	14.12
20*	13.1	12.2	13.3	12.4	11.5	10.6	9.7	8.8	6.9	6.10	4.11	3.12	–
21	1.1	31.1	1.3	31.3	29.4	29.5	27.6	27.7	25.8	24.9	23.10	22.11	21.12
22	20.1	19.2	20.3	19.4	18.5	17.6	16.7	15.8	13.9	13.10	11.11	11.12	–
23	9.1	8.2	9.3	8.4	7.5	6.6	5.7	4.8	2.9	2.10	31.10	30.11	–
24	29.12	28.1	26.2	28.3	26.4	26.5	24.6	24.7	22.8	21.9	20.10	19.11	18.12
25	17.1	16.2	17.3	16.4	15.5	14.6	13.7	12.8	10.9	10.10	8.11	8.12	–
26	6.1	5.2	6.3	5.4	4.5	3.6	2.7	1.8	30.8	29.9	28.10	27.11	–
27	26.12	25.1	23.2	25.3	23.4	23.5	21.6	21.7	19.8	18.9	17.10	16.11	15.12
28	14.1	13.2	14.3	13.4	12.5	11.6	10.7	9.8	7.9	7.10	5.11	5.12	–
29	3.1	2.2	3.3	2.4	1.5	31.5	29.6	29.7	27.8	26.9	25.10	24.11	23.12
30	22.1	21.2	22.3	21.4	20.5	19.6	18.7	17.8	15.9	15.10	13.11	13.12	–
31	11.1	10.2	11.3	10.4	9.5	8.6	7.7	6.8	4.9	4.10	2.11	2.12	–
32	31.12	30.1	28.2	30.3	28.4	28.5	26.6	26.7	24.8	23.9	22.10	21.11	20.12
33	19.1	18.2	19.3	18.4	17.5	16.6	15.7	14.8	12.9	12.10	10.11	10.12	–
34	8.1	7.2	8.3	7.4	6.5	5.6	4.7	3.8	1.9	1.10	30.10	29.11	–
35	28.12	27.1	25.2	27.3	25.4	25.5	23.6	23.7	21.8	20.9	19.10	18.11	17.12
36	16.1	15.2	16.3	15.4	14.5	13.6	12.7	11.8	9.9	9.10	7.11	7.12	–
37	5.1	4.2	5.3	4.4	3.5	2.6	1.7	31.7	29.8	28.9	27.10	26.11	–
38	25.12	24.1	22.2, •	24.3	22.4	22.5	20.6	20.7	18.8	17.9	16.10	15.11	14.12
39	13.1	12.2	13.3	12.4	11.5	10.6	9.7	8.8	6.9	6.10	4.11	4.12	–
40	2.1	1.2	2.3	1.4	30.4	30.5	28.6	28.7	26.8	25.9	24.10	23.11	22.12
41*	21.1	20.2	21.3	20.4	19.5	18.6	17.7	16.8	14.9	14.10	12.11	11.12	–
42	9.1	8.2	9.3	8.4	7.5	6.6	5.7	4.8	2.9	2.10	31.10	30.11	–
43	29.12	28.1	26.2	28.3	26.4	26.5	24.6	24.7	22.8	21.9	20.10	19.11	18.12
44	17.1	16.2	17.3	16.4	15.5	14.6	13.7	12.8	10.9	10.10	8.11	8.12	–
45	6.1	5.2	6.3	5.4	4.5	3.6	2.7	1.8	30.8	29.9	28.10	27.11	–
46	26.12	25.1	23.2	25.3	23.4	23.5	21.6	21.7	19.8	18.9	17.10	16.11	15.12
47	14.1	13.2	14.3	13.4	12.5	11.6	10.7	9.8	7.9	7.10	5.11	5.12	–
48	3.1	2.2	3.3	2.4	1.5	31.5	29.6	29.7	27.8	26.9	25.10	24.11	23.12
49	22.1	21.2	22.3	21.4	20.5	19.6	18.7	17.8	15.9	15.10	13.11	13.12	–

О	30	29/30	30	29	30	29	30	29	30	29	30/29	29	30
50	11.1	10.2	11.3	10.4	9.5	8.6	7.7	6.8	4.9	4.10	2.11	2.12	–
51	31.12	30.1	28.2	30.3	28.4	28.5	26.6	26.7	24.8	23.9	22.10	21.11	20.12
52	19.1	18.2	19.3	18.4	17.5	16.6	15.7	14.8	12.9	12.10	10.11	10.12	–
53	8.1	7.2	8.3	7.4	6.5	5.6	4.7	3.8	1.9	1.10	30.10	29.11	–
54	28.12	27.1	25.2	27.3	25.4	25.5	23.6	23.7	21.8	20.9	19.10	18.11	17.12
55	16.1	15.2	16.3	15.4	14.5	13.6	12.7	11.8	9.9	9.10	7.11	7.12	–
56	5.1	4.2	5.3	4.4	3.5	2.6	1.7	31.7	29.8	28.9	27.10	26.11	–
57	25.12	24.1	22.2, •	24.3	22.4	22.5	20.6	20.7	18.8	17.9	16.10	15.11	14.12
58	13.1	12.2	13.3	12.4	11.5	10.6	9.7	8.8	6.9	6.10	4.11	4.12	–
59	2.1	1.2	2.3	1.4	30.4	30.5	28.6	28.7	26.8	25.9	24.10	23.11	22.12
60	21.1	20.2	21.3	20.4	19.5	18.6	17.7	16.8	14.9	14.10	12.11	12.12	–
61	10.1	9.2	10.3	9.4	8.5	7.6	6.7	5.8	3.9	3.10	1.11	1.12	–
62*	30.12	29.1	27.2	29.3	27.4	27.5	25.6	25.7	23.8	22.9	21.10	19.11	18.12
63	17.1	16.2	17.3	16.4	15.5	14.6	13.7	12.8	10.9	10.10	8.11	8.12	–
64	6.1	5.2	6.3	5.4	4.5	3.6	2.7	1.8	30.8	29.9	28.10	27.11	–
65	26.12	25.1	23.2	25.3	23.4	23.5	21.6	21.7	19.8	18.9	17.10	16.11	15.12
66	14.1	13.2	14.3	13.4	12.5	11.6	10.7	9.8	7.9	7.10	5.11	5.12	–
67	3.1	2.2	3.3	2.4	1.5	31.5	29.6	29.7	27.8	26.9	25.10	24.11	23.12
68	22.1	21.2	22.3	21.4	20.5	19.6	18.7	17.8	15.9	15.10	13.11	13.12	–
69	11.1	10.2	11.3	10.4	9.5	8.6	7.7	6.8	4.9	4.10	2.11	2.12	–
70	31.12	30.1	28.2	30.3	28.4	28.5	26.6	26.7	24.8	23.9	22.10	21.11	20.12
71	19.1	18.2	19.3	18.4	17.5	16.6	15.7	14.8	12.9	12.10	10.11	10.12	–
72	8.1	7.2	8.3	7.4	6.5	5.6	4.7	3.8	1.9	1.10	30.10	29.11	–
73	28.12	27.1	25.2	27.3	25.4	25.5	23.6	23.7	21.8	20.9	19.10	18.11	17.12
74	16.1	15.2	16.3	15.4	14.5	13.6	12.7	11.8	9.9	9.10	7.11	7.12	–
75	5.1	4.2	5.3	4.4	3.5	2.6	1.7	31.7	29.8	28.9	27.10	26.11	–
76	25.12	24.1	22.2, •	24.3	22.4	22.5	20.6	20.7	18.8	17.9	16.10	15.11	14.12
77	13.1	12.2	13.3	12.4	11.5	10.6	9.7	8.8	6.9	6.10	4.11	4.12	–
78	2.1	1.2	2.3	1.4	30.4	30.5	28.6	28.7	26.8	25.9	24.10	23.11	22.12
79	21.1	20.2	21.3	20.4	19.5	18.6	17.7	16.8	14.9	14.10	12.11	12.12	–
80	10.1	9.2	10.3	9.4	8.5	7.6	6.7	5.8	3.9	3.10	1.11	1.12	–
81	30.12	29.1	27.2	29.3	27.4	27.5	25.6	25.7	23.8	22.9	21.10	20.11	19.12
82	18.1	17.2	18.3	17.4	16.5	15.6	14.7	13.8	11.9	11.10	9.11	9.12	–
83*	7.1	6.2	7.3	6.4	5.5	4.6	3.7	2.8	31.8	30.9	29.10	27.11	–
84	26.12	25.1	23.2	25.3	23.4	23.5	21.6	21.7	19.8	18.9	17.10	16.11	15.12
85	14.1	13.2	14.3	13.4	12.5	11.6	10.7	9.8	7.9	7.10	5.11	5.12	–
86	3.1	2.2	3.3	2.4	1.5	31.5	29.6	29.7	27.8	26.9	25.10	24.11	23.12
87	22.1	21.2	22.3	21.4	20.5	19.6	18.7	17.8	15.9	15.10	13.11	13.12	–
88	11.1	10.2	11.3	10.4	9.5	8.6	7.7	6.8	4.9	4.10	2.11	2.12	–
89	31.12	30.1	28.2	30.3	28.4	28.5	26.6	26.7	24.8	23.9	22.10	21.11	20.12
90	19.1	18.2	19.3	18.4	17.5	16.6	15.7	14.8	12.9	12.10	10.11	10.12	–
91	8.1	7.2	8.3	7.4	6.5	5.6	4.7	3.8	1.9	1.10	30.10	29.11	–
92	28.12	27.1	25.2	27.3	25.4	25.5	23.6	23.7	21.8	20.9	19.10	18.11	17.12
93	16.1	15.2	16.3	15.4	14.5	13.6	12.7	11.8	9.9	9.10	7.11	7.12	–
94	5.1	4.2	5.3	4.4	3.5	2.6	1.7	31.7	29.8	28.9	27.10	26.11	–
95	25.12	24.1	22.2, •	24.3	22.4	22.5	20.6	20.7	18.8	17.9	16.10	15.11	14.12
96	13.1	12.2	13.3	12.4	11.5	10.6	9.7	8.8	6.9	6.10	4.11	4.12	–
97	2.1	1.2	2.3	1.4	30.4	30.5	28.6	28.7	26.8	25.9	24.10	23.11	22.12
98	21.1	20.2	21.3	20.4	19.5	18.6	17.7	16.8	14.9	14.10	12.11	12.12	–
99	10.1	9.2	10.3	9.4	8.5	7.6	6.7	5.8	3.9	3.10	1.11	1.12	–

О	30	29/30	30	29	30	29	30	29	30	29	30/29	29	30
100	30.12	29.1	27.2	29.3	27.4	27.5	25.6	25.7	23.8	22.9	21.10	20.11	19.12
101	18.1	17.2	18.3	17.4	16.5	15.6	14.7	13.8	11.9	11.10	9.11	9.12	–
102	7.1	6.2	7.3	6.4	5.5	4.6	3.7	2.8	31.8	30.9	29.10	28.11	–
103	27.12	26.1	24.2	26.3	24.4	24.5	22.6	22.7	20.8	19.9	18.10	17.11	16.12
104*	15.1	14.2	15.3	14.4	13.5	12.6	11.7	10.8	8.9	8.10	6.11	5.12	–
105	3.1	2.2	3.3	2.4	1.5	31.5	29.6	29.7	27.8	26.9	25.10	24.11	23.12
106	22.1	21.2	22.3	21.4	20.5	19.6	18.7	17.8	15.9	15.10	13.11	13.12	–
107	11.1	10.2	11.3	10.4	9.5	8.6	7.7	6.8	4.9	4.10	2.11	2.12	–
108	31.12	30.1	28.2	30.3	28.4	28.5	26.6	26.7	24.8	23.9	22.10	21.11	20.12
109	19.1	18.2	19.3	18.4	17.5	16.6	15.7	14.8	12.9	12.10	10.11	10.12	–
110	8.1	7.2	8.3	7.4	6.5	5.6	4.7	3.8	1.9	1.10	30.10	29.11	–
111	28.12	27.1	25.2	27.3	25.4	25.5	23.6	23.7	21.8	20.9	19.10	18.11	17.12
112	16.1	15.2	16.3	15.4	14.5	13.6	12.7	11.8	9.9	9.10	7.11	7.12	–
113	5.1	4.2	5.3	4.4	3.5	2.6	1.7	31.7	29.8	28.9	27.10	26.11	–
114	25.12	24.1	22.2, •	24.3	22.4	22.5	20.6	20.7	18.8	17.9	16.10	15.11	14.12
115	13.1	12.2	13.3	12.4	11.5	10.6	9.7	8.8	6.9	6.10	4.11	4.12	–
116	2.1	1.2	2.3	1.4	30.4	30.5	28.6	28.7	26.8	25.9	24.10	23.11	22.12
117	21.1	20.2	21.3	20.4	19.5	18.6	17.7	16.8	14.9	14.10	12.11	12.12	–
118	10.1	9.2	10.3	9.4	8.5	7.6	6.7	5.8	3.9	3.10	1.11	1.12	–
119	30.12	29.1	27.2	29.3	27.4	27.5	25.6	25.7	23.8	22.9	21.10	20.11	19.12
120	18.1	17.2	18.3	17.4	16.5	15.6	14.7	13.8	11.9	11.10	9.11	9.12	–
121	7.1	6.2	7.3	6.4	5.5	4.6	3.7	2.8	31.8	30.9	29.10	28.11	–
122	27.12	26.1	24.2	26.3	24.4	24.5	22.6	22.7	20.8	19.9	18.10	17.11	16.12
123	15.1	14.2	15.3	14.4	13.5	12.6	11.7	10.8	8.9	8.10	6.11	6.12	–
124	4.1	3.2	4.3	3.4	2.5	1.6	30.6	30.7	28.8	27.9	26.10	25.11	24.12
125*	23.1	22.2	23.3	22.4	21.5	20.6	19.7	18.8	16.9	16.10	14.11	13.12	–
126	11.1	10.2	11.3	10.4	9.5	8.6	7.7	6.8	4.9	4.10	2.11	2.12	–
127	31.12	30.1	28.2	30.3	28.4	28.5	26.6	26.7	24.8	23.9	22.10	21.11	20.12
128	19.1	18.2	19.3	18.4	17.5	16.6	15.7	14.8	12.9	12.10	10.11	10.12	–
129	8.1	7.2	8.3	7.4	6.5	5.6	4.7	3.8	1.9	1.10	30.10	29.11	–
130	28.12	27.1	25.2	27.3	25.4	25.5	23.6	23.7	21.8	20.9	19.10	18.11	17.12
131	16.1	15.2	16.3	15.4	14.5	13.6	12.7	11.8	9.9	9.10	7.11	7.12	–
132	5.1	4.2	5.3	4.4	3.5	2.6	1.7	31.7	29.8	28.9	27.10	26.11	–
133	25.12	24.1	22.2, •	24.3	22.4	22.5	20.6	20.7	18.8	17.9	16.10	15.11	14.12
134	13.1	12.2	13.3	12.4	11.5	10.6	9.7	8.8	6.9	6.10	4.11	4.12	–
135	2.1	1.2	2.3	1.4	30.4	30.5	28.6	28.7	26.8	25.9	24.10	23.11	22.12
136	21.1	20.2	21.3	20.4	19.5	18.6	17.7	16.8	14.9	14.10	12.11	12.12	–
137	10.1	9.2	10.3	9.4	8.5	7.6	6.7	5.8	3.9	3.10	1.11	1.12	–
138	30.12	29.1	27.2	29.3	27.4	27.5	25.6	25.7	23.8	22.9	21.10	20.11	19.12
139	18.1	17.2	18.3	17.4	16.5	15.6	14.7	13.8	11.9	11.10	9.11	9.12	–
140	7.1	6.2	7.3	6.4	5.5	4.6	3.7	2.8	31.8	30.9	29.10	28.11	–
141	27.12	26.1	24.2	26.3	24.4	24.5	22.6	22.7	20.8	19.9	18.10	17.11	16.12
142	15.1	14.2	15.3	14.4	13.5	12.6	11.7	10.8	8.9	8.10	6.11	6.12	–
143	4.1	3.2	4.3	3.4	2.5	1.6	30.6	30.7	28.8	27.9	26.10	25.11	24.12
144	23.1	22.2	23.3	22.4	21.5	20.6	19.7	18.8	16.9	16.10	14.11	14.12	–
145	12.1	11.2	12.3	11.4	10.5	9.6	8.7	7.8	5.9	5.10	3.11	3.12	–
146*	1.1	31.1	1.3	31.3	29.4	29.5	27.6	27.7	25.8	24.9	23.10	21.11	20.12
147	19.1	18.2	19.3	18.4	17.5	16.6	15.7	14.8	12.9	12.10	10.11	10.12	–
148	8.1	7.2	8.3	7.4	6.5	5.6	4.7	3.8	1.9	1.10	30.10	29.11	–
149	28.12	27.1	25.2	27.3	25.4	25.5	23.6	23.7	21.8	20.9	19.10	18.11	17.12

О	30	29/30	30	29	30	29	30	29	30	29	30/29	29	30
150	16.1	15.2	16.3	15.4	14.5	13.6	12.7	11.8	9.9	9.10	7.11	7.12	–
151	5.1	4.2	5.3	4.4	3.5	2.6	1.7	31.7	29.8	28.9	27.10	26.11	–
152	25.12	24.1	22.2, •	24.3	22.4	22.5	20.6	20.7	18.8	17.9	16.10	15.11	14.12
153	13.1	12.2	13.3	12.4	11.5	10.6	9.7	8.8	6.9	6.10	4.11	4.12	–
154	2.1	1.2	2.3	1.4	30.4	30.5	28.6	28.7	26.8	25.9	24.10	23.11	22.12
155	21.1	20.2	21.3	20.4	19.5	18.6	17.7	16.8	14.9	14.10	12.11	12.12	–
156	10.1	9.2	10.3	9.4	8.5	7.6	6.7	5.8	3.9	3.10	1.11	1.12	–
157	30.12	29.1	27.2	29.3	27.4	27.5	25.6	25.7	23.8	22.9	21.10	20.11	19.12
158	18.1	17.2	18.3	17.4	16.5	15.6	14.7	13.8	11.9	11.10	9.11	9.12	–
159	7.1	6.2	7.3	6.4	5.5	4.6	3.7	2.8	31.8	30.9	29.10	28.11	–
160	27.12	26.1	24.2	26.3	24.4	24.5	22.6	22.7	20.8	19.9	18.10	17.11	16.12
161	15.1	14.2	15.3	14.4	13.5	12.6	11.7	10.8	8.9	8.10	6.11	6.12	–
162	4.1	3.2	4.3	3.4	2.5	1.6	30.6	30.7	28.8	27.9	26.10	25.11	24.12
163	23.1	22.2	23.3	22.4	21.5	20.6	19.7	18.8	16.9	16.10	14.11	14.12	–
164	12.1	11.2	12.3	11.4	10.5	9.6	8.7	7.8	5.9	5.10	3.11	3.12	–
165	1.1	31.1	1.3	31.3	29.4	29.5	27.6	27.7	25.8	24.9	23.10	22.11	21.12
166	20.1	19.2	20.3	19.4	18.5	17.6	16.7	15.8	13.9	13.10	11.11	11.12	–
167*	9.1	8.2	9.3	8.4	7.5	6.6	5.7	4.8	2.9	2.10	31.10	29.11	–
168	28.12	27.1	25.2	27.3	25.4	25.5	23.6	23.7	21.8	20.9	19.10	18.11	17.12
169	16.1	15.2	16.3	15.4	14.5	13.6	12.7	11.8	9.9	9.10	7.11	7.12	–
170	5.1	4.2	5.3	4.4	3.5	2.6	1.7	31.7	29.8	28.9	27.10	26.11	–
171	25.12	24.1	22.2, •	24.3	22.4	22.5	20.6	20.7	18.8	17.9	16.10	15.11	14.12
172	13.1	12.2	13.3	12.4	11.5	10.6	9.7	8.8	6.9	6.10	4.11	4.12	–
173	2.1	1.2	2.3	1.4	30.4	30.5	28.6	28.7	26.8	25.9	24.10	23.11	22.12
174	21.1	20.2	21.3	20.4	19.5	18.6	17.7	16.8	14.9	14.10	12.11	12.12	–
175	10.1	9.2	10.3	9.4	8.5	7.6	6.7	5.8	3.9	3.10	1.11	1.12	–
176	30.12	29.1	27.2	29.3	27.4	27.5	25.6	25.7	23.8	22.9	21.10	20.11	19.12
177	18.1	17.2	18.3	17.4	16.5	15.6	14.7	13.8	11.9	11.10	9.11	9.12	–
178	7.1	6.2	7.3	6.4	5.5	4.6	3.7	2.8	31.8	30.9	29.10	28.11	–
179	27.12	26.1	24.2	26.3	24.4	24.5	22.6	22.7	20.8	19.9	18.10	17.11	16.12
180	15.1	14.2	15.3	14.4	13.5	12.6	11.7	10.8	8.9	8.10	6.11	6.12	–
181	4.1	3.2	4.3	3.4	2.5	1.6	30.6	30.7	28.8	27.9	26.10	25.11	24.12
182	23.1	22.2	23.3	22.4	21.5	20.6	19.7	18.8	16.9	16.10	14.11	14.12	–
183	12.1	11.2	12.3	11.4	10.5	9.6	8.7	7.8	5.9	5.10	3.11	3.12	–
184	1.1	31.1	1.3	31.3	29.4	29.5	27.6	27.7	25.8	24.9	23.10	22.11	21.12
185	20.1	19.2	20.3	19.4	18.5	17.6	16.7	15.8	13.9	13.10	11.11	11.12	–
186	9.1	8.2	9.3	8.4	7.5	6.6	5.7	4.8	2.9	2.10	31.10	30.11	–
187	29.12	28.1	26.2	28.3	26.4	26.5	24.6	24.7	22.8	21.9	20.10	19.11	18.12
188*	17.1	16.2	17.3	16.4	15.5	14.6	13.7	12.8	10.9	10.10	8.11	7.12	–
189	5.1	4.2	5.3	4.4	3.5	2.6	1.7	31.7	29.8	28.9	27.10	26.11	–
190	25.12	24.1	22.2, •	24.3	22.4	22.5	20.6	20.7	18.8	17.9	16.10	15.11	14.12
191	13.1	12.2	13.3	12.4	11.5	10.6	9.7	8.8	6.9	6.10	4.11	4.12	–
192	2.1	1.2	2.3	1.4	30.4	30.5	28.6	28.7	26.8	25.9	24.10	23.11	22.12
193	21.1	20.2	21.3	20.4	19.5	18.6	17.7	16.8	14.9	14.10	12.11	12.12	–
194	10.1	9.2	10.3	9.4	8.5	7.6	6.7	5.8	3.9	3.10	1.11	1.12	–
195	30.12	29.1	27.2	29.3	27.4	27.5	25.6	25.7	23.8	22.9	21.10	20.11	19.12
196	18.1	17.2	18.3	17.4	16.5	15.6	14.7	13.8	11.9	11.10	9.11	9.12	–
197	7.1	6.2	7.3	6.4	5.5	4.6	3.7	2.8	31.8	30.9	29.10	28.11	–
198	27.12	26.1	24.2	26.3	24.4	24.5	22.6	22.7	20.8	19.9	18.10	17.11	16.12
199	15.1	14.2	15.3	14.4	13.5	12.6	11.7	10.8	8.9	8.10	6.11	6.12	–

О	30	29/30	30	29	30	29	30	29	30	29	30/29	29	30
200	4.1	3.2	4.3	3.4	2.5	1.6	30.6	30.7	28.8	27.9	26.10	25.11	24.12
201	23.1	22.2	23.3	22.4	21.5	20.6	19.7	18.8	16.9	16.10	14.11	14.12	–
202	12.1	11.2	12.3	11.4	10.5	9.6	8.7	7.8	5.9	5.10	3.11	3.12	–
203	1.1	31.1	1.3	31.3	29.4	29.5	27.6	27.7	25.8	24.9	23.10	22.11	21.12
204	20.1	19.2	20.3	19.4	18.5	17.6	16.7	15.8	13.9	13.10	11.11	11.12	–
205	9.1	8.2	9.3	8.4	7.5	6.6	5.7	4.8	2.9	2.10	31.10	30.11	–
206	29.12	28.1	26.2	28.3	26.4	26.5	24.6	24.7	22.8	21.9	20.10	19.11	18.12
207	17.1	16.2	17.3	16.4	15.5	14.6	13.7	12.8	10.9	10.10	8.11	8.12	–
208	6.1	5.2	6.3	5.4	4.5	3.6	2.7	1.8	30.8	29.9	28.10	27.11	–
209*	26.12	25.1	23.2	25.3	23.4	23.5	21.6	21.7	19.8	18.9	17.10	15.11	14.12
210	13.1	12.2	13.3	12.4	11.5	10.6	9.7	8.8	6.9	6.10	4.11	4.12	–
211	2.1	1.2	2.3	1.4	30.4	30.5	28.6	28.7	26.8	25.9	24.10	23.11	22.12
212	21.1	20.2	21.3	20.4	19.5	18.6	17.7	16.8	14.9	14.10	12.11	12.12	–
213	10.1	9.2	10.3	9.4	8.5	7.6	6.7	5.8	3.9	3.10	1.11	1.12	–
214	30.12	29.1	27.2	29.3	27.4	27.5	25.6	25.7	23.8	22.9	21.10	20.11	19.12
215	18.1	17.2	18.3	17.4	16.5	15.6	14.7	13.8	11.9	11.10	9.11	9.12	–
216	7.1	6.2	7.3	6.4	5.5	4.6	3.7	2.8	31.8	30.9	29.10	28.11	–
217	27.12	26.1	24.2	26.3	24.4	24.5	22.6	22.7	20.8	19.9	18.10	17.11	16.12
218	15.1	14.2	15.3	14.4	13.5	12.6	11.7	10.8	8.9	8.10	6.11	6.12	–
219	4.1	3.2	4.3	3.4	2.5	1.6	30.6	30.7	28.8	27.9	26.10	25.11	24.12
220	23.1	22.2	23.3	22.4	21.5	20.6	19.7	18.8	16.9	16.10	14.11	14.12	–
221	12.1	11.2	12.3	11.4	10.5	9.6	8.7	7.8	5.9	5.10	3.11	3.12	–
222	1.1	31.1	1.3	31.3	29.4	29.5	27.6	27.7	25.8	24.9	23.10	22.11	21.12
223	20.1	19.2	20.3	19.4	18.5	17.6	16.7	15.8	13.9	13.10	11.11	11.12	–
224	9.1	8.2	9.3	8.4	7.5	6.6	5.7	4.8	2.9	2.10	31.10	30.11	–
225	29.12	28.1	26.2	28.3	26.4	26.5	24.6	24.7	22.8	21.9	20.10	19.11	18.12
226	17.1	16.2	17.3	16.4	15.5	14.6	13.7	12.8	10.9	10.10	8.11	8.12	–
227	6.1	5.2	6.3	5.4	4.5	3.6	2.7	1.8	30.8	29.9	28.10	27.11	–
228	26.12	25.1	23.2	25.3	23.4	23.5	21.6	21.7	19.8	18.9	17.10	16.11	15.12
229	14.1	13.2	14.3	13.4	12.5	11.6	10.7	9.8	7.9	7.10	5.11	5.12	–
230*	3.1	2.2	3.3	2.4	1.5	31.5	29.6	29.7	27.8	26.9	25.10	23.11	22.12
231	21.1	20.2	21.3	20.4	19.5	18.6	17.7	16.8	14.9	14.10	12.11	12.12	–
232	10.1	9.2	10.3	9.4	8.5	7.6	6.7	5.8	3.9	3.10	1.11	1.12	–
233	30.12	29.1	27.2	29.3	27.4	27.5	25.6	25.7	23.8	22.9	21.10	20.11	19.12
234	18.1	17.2	18.3	17.4	16.5	15.6	14.7	13.8	11.9	11.10	9.11	9.12	–
235	7.1	6.2	7.3	6.4	5.5	4.6	3.7	2.8	31.8	30.9	29.10	28.11	–
236	27.12	26.1	24.2	26.3	24.4	24.5	22.6	22.7	20.8	19.9	18.10	17.11	16.12
237	15.1	14.2	15.3	14.4	13.5	12.6	11.7	10.8	8.9	8.10	6.11	6.12	–
238	4.1	3.2	4.3	3.4	2.5	1.6	30.6	30.7	28.8	27.9	26.10	25.11	24.12
239	23.1	22.2	23.3	22.4	21.5	20.6	19.7	18.8	16.9	16.10	14.11	14.12	–
240	12.1	11.2	12.3	11.4	10.5	9.6	8.7	7.8	5.9	5.10	3.11	3.12	–
241	1.1	31.1	1.3	31.3	29.4	29.5	27.6	27.7	25.8	24.9	23.10	22.11	21.12
242	20.1	19.2	20.3	19.4	18.5	17.6	16.7	15.8	13.9	13.10	11.11	11.12	–
243	9.1	8.2	9.3	8.4	7.5	6.6	5.7	4.8	2.9	2.10	31.10	30.11	–
244	29.12	28.1	26.2	28.3	26.4	26.5	24.6	24.7	22.8	21.9	20.10	19.11	18.12
245	17.1	16.2	17.3	16.4	15.5	14.6	13.7	12.8	10.9	10.10	8.11	8.12	–
246	6.1	5.2	6.3	5.4	4.5	3.6	2.7	1.8	30.8	29.9	28.10	27.11	–
247	26.12	25.1	23.2	25.3	23.4	23.5	21.6	21.7	19.8	18.9	17.10	16.11	15.12
248	14.1	13.2	14.3	13.4	12.5	11.6	10.7	9.8	7.9	7.10	5.11	5.12	–
249	3.1	2.2	3.3	2.4	1.5	31.5	29.6	29.7	27.8	26.9	25.10	24.11	23.12

О	30	29/30	30	29	30	29	30	29	30	29	30/29	29	30
250	22.1	21.2	22.3	21.4	20.5	19.6	18.7	17.8	15.9	15.10	13.11	13.12	–
251*	11.1	10.2	11.3	10.4	9.5	8.6	7.7	6.8	4.9	4.10	2.11	1.12	–
252	30.12	29.1	27.2	29.3	27.4	27.5	25.6	25.7	23.8	22.9	21.10	20.11	19.12
253	18.1	17.2	18.3	17.4	16.5	15.6	14.7	13.8	11.9	11.10	9.11	9.12	–
254	7.1	6.2	7.3	6.4	5.5	4.6	3.7	2.8	31.8	30.9	29.10	28.11	–
255	27.12	26.1	24.2	26.3	24.4	24.5	22.6	22.7	20.8	19.9	18.10	17.11	16.12
256	15.1	14.2	15.3	14.4	13.5	12.6	11.7	10.8	8.9	8.10	6.11	6.12	–
257	4.1	3.2	4.3	3.4	2.5	1.6	30.6	30.7	28.8	27.9	26.10	25.11	24.12
258	23.1	22.2	23.3	22.4	21.5	20.6	19.7	18.8	16.9	16.10	14.11	14.12	–
259	12.1	11.2	12.3	11.4	10.5	9.6	8.7	7.8	5.9	5.10	3.11	3.12	–
260	1.1	31.1	1.3	31.3	29.4	29.5	27.6	27.7	25.8	24.9	23.10	22.11	21.12
261	20.1	19.2	20.3	19.4	18.5	17.6	16.7	15.8	13.9	13.10	11.11	11.12	–
262	9.1	8.2	9.3	8.4	7.5	6.6	5.7	4.8	2.9	2.10	31.10	30.11	–
263	29.12	28.1	26.2	28.3	26.4	26.5	24.6	24.7	22.8	21.9	20.10	19.11	18.12
264	17.1	16.2	17.3	16.4	15.5	14.6	13.7	12.8	10.9	10.10	8.11	8.12	–
265	6.1	5.2	6.3	5.4	4.5	3.6	2.7	1.8	30.8	29.9	28.10	27.11	–
266	26.12	25.1	23.2	25.3	23.4	23.5	21.6	21.7	19.8	18.9	17.10	16.11	15.12
267	14.1	13.2	14.3	13.4	12.5	11.6	10.7	9.8	7.9	7.10	5.11	5.12	–
268	3.1	2.2	3.3	2.4	1.5	31.5	29.6	29.7	27.8	26.9	25.10	24.11	23.12
269	22.1	21.2	22.3	21.4	20.5	19.6	18.7	17.8	15.9	15.10	13.11	13.12	–
270	11.1	10.2	11.3	10.4	9.5	8.6	7.7	6.8	4.9	4.10	2.11	2.12	–
271	31.12	30.1	28.2	30.3	28.4	28.5	26.6	26.7	24.8	23.9	22.10	21.11	20.12
272*	19.1	18.2	19.3	18.4	17.5	16.6	15.7	14.8	12.9	12.10	10.11	9.12	–
273	7.1	6.2	7.3	6.4	5.5	4.6	3.7	2.8	31.8	30.9	29.10	28.11	–
274	27.12	26.1	24.2	26.3	24.4	24.5	22.6	22.7	20.8	19.9	18.10	17.11	16.12
275	15.1	14.2	15.3	14.4	13.5	12.6	11.7	10.8	8.9	8.10	6.11	6.12	–
276	4.1	3.2	4.3	3.4	2.5	1.6	30.6	30.7	28.8	27.9	26.10	25.11	24.12
277	23.1	22.2	23.3	22.4	21.5	20.6	19.7	18.8	16.9	16.10	14.11	14.12	–
278	12.1	11.2	12.3	11.4	10.5	9.6	8.7	7.8	5.9	5.10	3.11	3.12	–
279	1.1	31.1	1.3	31.3	29.4	29.5	27.6	27.7	25.8	24.9	23.10	22.11	21.12
280	20.1	19.2	20.3	19.4	18.5	17.6	16.7	15.8	13.9	13.10	11.11	11.12	–
281	9.1	8.2	9.3	8.4	7.5	6.6	5.7	4.8	2.9	2.10	31.10	30.11	–
282	29.12	28.1	26.2	28.3	26.4	26.5	24.6	24.7	22.8	21.9	20.10	19.11	18.12
283	17.1	16.2	17.3	16.4	15.5	14.6	13.7	12.8	10.9	10.10	8.11	8.12	–
284	6.1	5.2	6.3	5.4	4.5	3.6	2.7	1.8	30.8	29.9	28.10	27.11	–
285	26.12	25.1	23.2	25.3	23.4	23.5	21.6	21.7	19.8	18.9	17.10	16.11	15.12
286	14.1	13.2	14.3	13.4	12.5	11.6	10.7	9.8	7.9	7.10	5.11	5.12	–
287	3.1	2.2	3.3	2.4	1.5	31.5	29.6	29.7	27.8	26.9	25.10	24.11	23.12
288	22.1	21.2	22.3	21.4	20.5	19.6	18.7	17.8	15.9	15.10	13.11	13.12	–
289	11.1	10.2	11.3	10.4	9.5	8.6	7.7	6.8	4.9	4.10	2.11	2.12	–
290	31.12	30.1	28.2	30.3	28.4	28.5	26.6	26.7	24.8	23.9	22.10	21.11	20.12
291	19.1	18.2	19.3	18.4	17.5	16.6	15.7	14.8	12.9	12.10	10.11	10.12	–
292	8.1	7.2	8.3	7.4	6.5	5.6	4.7	3.8	1.9	1.10	30.10	29.11	–
293*	28.12	27.1	25.2	27.3	25.4	25.5	23.6	23.7	21.8	20.9	19.10	17.11	16.12
294	15.1	14.2	15.3	14.4	13.5	12.6	11.7	10.8	8.9	8.10	6.11	6.12	–
295	4.1	3.2	4.3	3.4	2.5	1.6	30.6	30.7	28.8	27.9	26.10	25.11	24.12
296	23.1	22.2	23.3	22.4	21.5	20.6	19.7	18.8	16.9	16.10	14.11	14.12	–
297	12.1	11.2	12.3	11.4	10.5	9.6	8.7	7.8	5.9	5.10	3.11	3.12	–
298	1.1	31.1	1.3	31.3	29.4	29.5	27.6	27.7	25.8	24.9	23.10	22.11	21.12
299	20.1	19.2	20.3	19.4	18.5	17.6	16.7	15.8	13.9	13.10	11.11	11.12	–

О	30	29/30	30	29	30	29	30	29	30	29	30/29	29	30
300	9.1	8.2	9.3	8.4	7.5	6.6	5.7	4.8	2.9	2.10	31.10	30.11	–
301	29.12	28.1	26.2	28.3	26.4	26.5	24.6	24.7	22.8	21.9	20.10	19.11	18.12
302	17.1	16.2	17.3	16.4	15.5	14.6	13.7	12.8	10.9	10.10	8.11	8.12	–
303	6.1	5.2	6.3	5.4	4.5	3.6	2.7	1.8	30.8	29.9	28.10	27.11	–
304	26.12	25.1	23.2	25.3	23.4	23.5	21.6	21.7	19.8	18.9	17.10	16.11	15.12
305	14.1	13.2	14.3	13.4	12.5	11.6	10.7	9.8	7.9	7.10	5.11	5.12	–
306	3.1	2.2	3.3	2.4	1.5	31.5	29.6	29.7	27.8	26.9	25.10	24.11	23.12
307	22.1	21.2	22.3	21.4	20.5	19.6	18.7	17.8	15.9	15.10	13.11	13.12	–
308	11.1	10.2	11.3	10.4	9.5	8.6	7.7	6.8	4.9	4.10	2.11	2.12	–
309	31.12	30.1	28.2	30.3	28.4	28.5	26.6	26.7	24.8	23.9	22.10	21.11	20.12
310	19.1	18.2	19.3	18.4	17.5	16.6	15.7	14.8	12.9	12.10	10.11	10.12	–
311	8.1	7.2	8.3	7.4	6.5	5.6	4.7	3.8	1.9	1.10	30.10	29.11	–
312	28.12	27.1	25.2	27.3	25.4	25.5	23.6	23.7	21.8	20.9	19.10	18.11	17.12
313	16.1	15.2	16.3	15.4	14.5	13.6	12.7	11.8	9.9	9.10	7.11	7.12	–
314*	5.1	4.2	5.3	4.4	3.5	2.6	1.7	31.7	29.8	28.9	27.10	25.11	24.12

Таблица 5. Эпакты новоюлианского календаря (проект)

Дни	**Янв.**	**Фев.**	**Мар.**	**Апр.**	**Май**	**Июн.**	**Июл.**	**Авг.**	**Сен.**	**Окт.**	**Ноя.**	**Дек.**
1	30	29	30	29	28	27	26	25	23	23	21	21, 20*
2	29	28	29	28	27	26	25	24	22	22	20	20
3	28	27	28	27	26	25	24	23	21	21	19	19, 18*
4	27	26	27	26	25	24	23	22	20	20	18	18
5	26	25	26	25	24	23	22	21	19	19	17	17, 16*
6	25	24	25	24	23	22	21	20	18	18	16	16
7	24	23	24	23	22	21	20	19	17	17	15	15, 14*
8	23	22	23	22	21	20	19	18	16	16	14	14
9	22	21	22	21	20	19	18	17	15	15	13	13, 12*
10	21	20	21	20	19	18	17	16	14	14	12	12
11	20	19	20	19	18	17	16	15	13	13	11	11, 10*
12	19	18	19	18	17	16	15	14	12	12	10	10
13	18	17	18	17	16	15	14	13	11	11	9	9, 8*
14	17	16	17	16	15	14	13	12	10	10	8	8, 7, 6*
15	16	15	16	15	14	13	12	11	9	9	7, 6*	6
16	15	14	15	14	13	12	11	10	8	8, 7	6	5, 4*
17	14	13	14	13	12	11	10	9	7	6	5, 4*	4
18	13	12	13	12	11	10	9	8, 7	6	5	4	3, 2*
19	12	11	12	11	10	9	8	6	5	4	3, 2*	2
20	11	10	11	10	9	8, 7	7	5	4	3	2	1, 30*
21	10	9	10	9	8	6	6	4	3	2	1,30*	30
22	9	8, 7 •	9	8, 7	7	5	5	3	2	1	30	29, 28*
23	8	6	8	6	6	4	4	2	1	30	29, 28*	28
24	7	5	7	5	5	3	3	1	30	29	28	27, 26*
25	6	4	6	4	4	2	2	30	29	28	27, 26*	7
26	5	3	5	3	3	1	1	29	28	27	26	6
27	4	2	4	2	2	30	30	28	27	26	25, 24*	5
28	3	1	3	1	1	29	29	27	26	25	24	4
29	2		2	30	30	28	28	26	25	24	23, 22*	3
30	1		1	29	29	27	27	25	24	23	22	2
31	30		30		28		26	24		22		1